

Les dialectes des démonstrations et des algorithmes

Emmanuel Beffara

Université d'Aix-Marseille

Colloque CORFEM, 12 juin 2018

Les mathématiques se font en langue naturelle

- Le but est de se faire comprendre de son interlocuteur.
- Il y a du jargon:
 - un vocabulaire pour les notions spécifiques au domaine,
 - une grammaire pour structurer le discours.
- Le niveau de détail employé dépend de l'interlocuteur.

L'objet du discours est formel:

Démonstration On veut convaincre l'interlocuteur de la validité d'une conséquence logique (ou de la véracité d'un énoncé).

Algorithme On veut expliquer à l'interlocuteur un procédé permettant d'obtenir un résultat à partir d'une donnée quelconque.

Dans les deux cas, on emploie des arguments que l'on pourrait en principe préciser jusqu'à atteindre des principes premiers.

Comparaison des dialectes

Les discours sont de formes différentes:

Démonstration style **descriptif**, on énonce des faits (indicatif présent, verbes d'état) et des relations de causalité

Algorithme style **opératoire**, on prescrit des actions (impératif ou infinitif à valeur impérative, verbes d'action) et éventuellement des relations temporelles

Une partie du vocabulaire est partagée, mais avec des différences de signification:

- variables
- tournures conditionnelles « si ... alors ... »
- quantification « pour tout ... »

Variables

Caractéristiques communes entre les dialectes:

- un nom (une lettre) qui désigne une valeur,
- libre (parlant) ou lié (muet) avec une portée.

Différents types d'usages:

<i>définition</i>	Posons $p = a^2 + 2ab$.	$p \leftarrow a^2 + 2ab$
<i>supposé donné</i>	Par hypothèse, $a \neq 0$.	Algorithme PGCD(a,b)
<i>générique</i>	Soit a un entier positif.	
<i>affectation</i>		$a \leftarrow a + 1$

On pourrait discuter sur les statuts de l'égalité et l'affectation...

Structure conditionnelle

La tournure « Si ... alors ... » est employée dans tous les contextes que l'on considère, avec des significations différentes:

Proposition « Si n est pair alors n^2 est pair. »

Énonce une implication.

Démonstration « Si $a \neq 0$ alors on pose $b = aq + r \dots$ »

Fait partie d'une disjonction de cas.

Algorithme « Si $a = 0$ alors renvoyer b . »

Décrit un branchement conditionnel.

On n'emploie jamais « Si *action* alors ... » qui a une signification encore différente (aspect temporel).

Quantification et itération

De même, les tournures de la forme « Pour tout . . . » ont un sens différent selon la nature (déclarative ou opératoire) de l'énoncé où elles apparaissent.

Proposition « Pour tout x , on a $x^2 + 2x + 1 > 0$. »

Énonce une propriété universelle des éléments d'un ensemble.

Algorithme « Pour chaque x dans L , faire $s \leftarrow s + x$. »

Décrit la répétition d'une opération sur tous les éléments d'une collection donnée.

Le langage des démonstrations n'emploie pas le « pour tout » mais des variables génériques pour démontrer les énoncés universels.

Comment faire le lien?

Des mots et des tournures sont utilisés dans les raisonnements et dans les algorithmes mais avec un sens différent. Comment va-t-on s'y retrouver?

Si les langages se ressemblent, ce n'est pas par hasard!

On peut faire le lien de plusieurs façons:

- tester une propriété au moyen d'un programme
- démontrer la correction d'un algorithme
- extraire un algorithme d'une démonstration
- comprendre un énoncé logique par son aspect opératoire

Que faire de cela?

Démonstration et algorithme peuvent être vus *dans une certaine mesure* comme deux visions complémentaires d'une même construction abstraite.

- Pensée descriptive: s'attacher aux propriétés des objets, aux conséquences logiques. La construction d'une démonstration réintroduit une dynamique de nature algorithmique dans le discours.
- Pensée opératoire: s'attacher à la méthode de construction d'une réponse à une question. La justification de la méthode réintroduit un aspect descriptif qui permet le raisonnement générique.

La proximité des dialectes n'est pas fortuite, même s'il s'agit de dialectes distincts du langage mathématique.