De la construction de triangles avec des gabarits à l'utilisation des cas d'égalité pour démontrer

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, professeur émérite à l'université d'Artois, Laboratoire de Didactique André Revuz

Charlène Piot, professeur au collège Dulcie September à Arcueil

Groupe géométrie de l' IREM de Paris

Plan

- Introduction : Des raisons pour appuyer une progression sur les cas d'égalité des triangles
- Vision des figures
- Evolution possible du cycle 2 au cycle 4
  - Reproduction d'un polygone
  - Construction de triangles
- Progression possible sur le cycle 4 en appui sur les cas d'égalité
- Deux exemples à travailler dans l'atelier
- Mise en commun et discussion

Introduction

- Des raisons pour appuyer une progression sur les cas d’égalité des triangles
  - Des outils de démonstration puissants et plus accessibles pour les élèves : par exemple, on peut dès la 5$^{\text{ème}}$ démontrer toutes les propriétés qu’on a admises en 6$^{\text{ème}}$ sur la symétrie orthogonale.
  - Ne nécessite pas une vision aussi élaborée des figures et la définition des objets géométriques comme ensemble de points.

Vision des figures : un exemple. Elèves de seconde en 2000.

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
Soit M un point du segment [AB], distinct de A et B.
La droite (OM) coupe [CD] en N.
Faire une figure.
Le but de cet exercice est de démontrer que O est le milieu de [MN], de deux manières différentes.

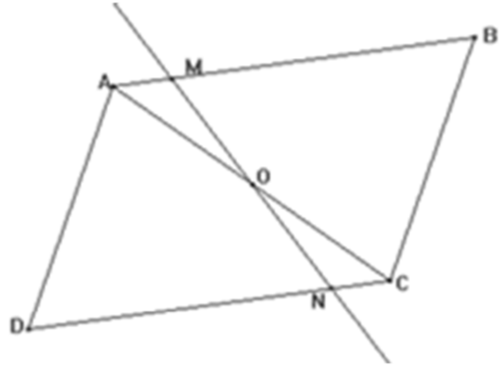


Figure 1

Suivaient deux questions subdivisées en sous-questions détaillant chacune des deux manières :

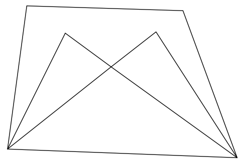
1) démontrer que AOM et OCN sont isométriques
2) démontrer que N est l'image de M par la symétrie centrale de centre O.

Difficulté dans la deuxième méthode : voir une droite comme définie par deux points et un point comme intersection de deux droites. Déconstruction dimensionnelle de la figure.

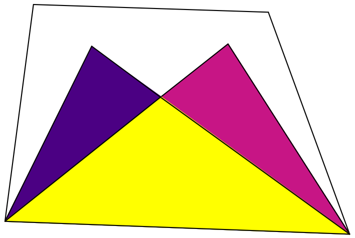
Trois regards que l'on peut porter sur les figures

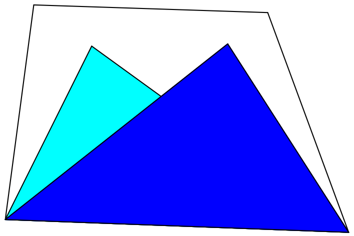
- Pour les distinguer, nous prenons en compte (cf. Duval)
  - la dimension des unités figurales
  - la possibilité d'y voir des unités figurales non tracées mais qui pourraient se définir à partir de celles qui sont présentes sur la figure et permettraient d'engendrer tout ou partie de la figure.
- Par exemple un triangle est délimité par son contour mais il peut être défini aussi à partir de trois droites sécantes ou de trois points.
- Ces unités figurales potentiellement présentes peuvent représenter des objets géométriques (surfaces, lignes, points). Une unité figurale peut représenter plusieurs objets géométriques (par exemple un trait peut représenter un segment, une demi-droite, une droite)

Trois visions d’une même figure composée



Vision surfaces ou D2 (vision naturelle)



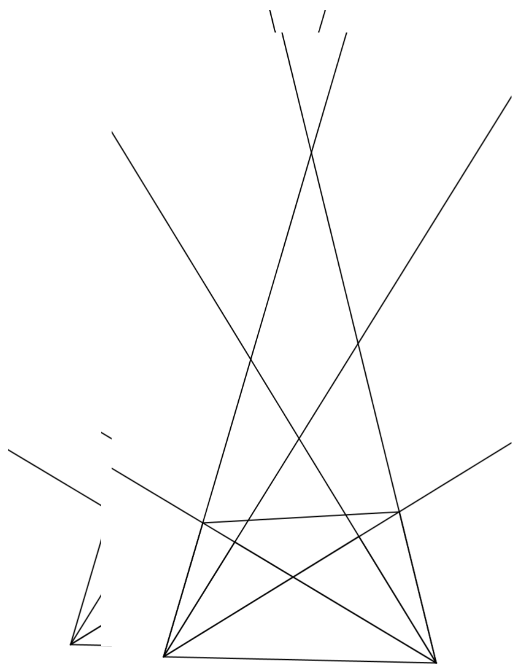


- Dans une vision « surfaces », on peut voir
  - Trois triangles sur un quadrilatère
  - Deux triangles qui se chevauchent sur un quadrilatère.
- Les seules lignes sont des bords de surfaces
- Les points sont des sommets de surfaces, des points isolés ou, en cas de superposition, des intersections de bords.
- On ne peut pas créer de nouvelles lignes

Trois visions d’une même figure composée

Vision « lignes » (ou D1)

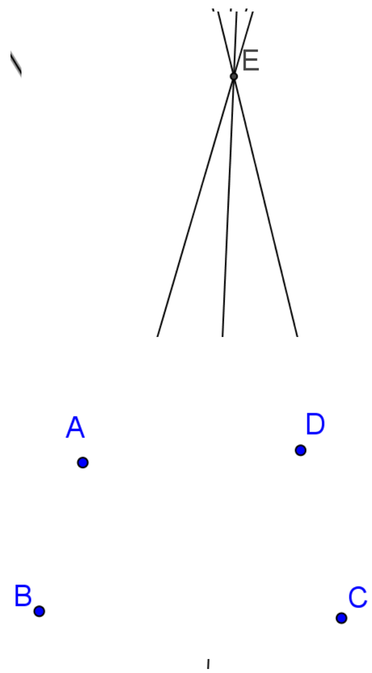
- La figure est constituée de lignes qui peuvent se tracer avec des instruments :
  - la règle pour les droites, les demi-droites (qu’on peut prolonger) et les segments,
  - le compas pour les cercles ou les arcs de cercles.
- Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de lignes qu’on a déjà.
- On peut tracer des segments (voire des demi-droites ou des droites) qui relient des points qu’on a déjà.
- On peut obtenir de nouveaux points par intersection de lignes qu’on a prolongées mais pas créer ces points pour obtenir de nouvelles lignes ou créer des lignes pour obtenir de nouveaux points.
- Sur l’exemple, on verra plus ou moins de lignes supports **des** côtés : les lignes qui font sortir de l’enveloppe convexe de la figure initiale sont plus difficiles à considérer.



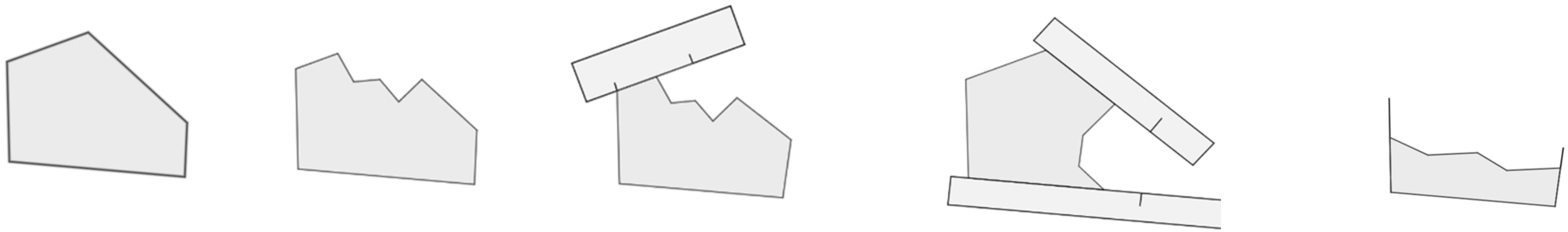
Trois visions d’une même figure composée

Vision « points » (ou D0)

- Dans une vision « points » de la figure, on peut créer des points par intersection de deux lignes et les points peuvent définir des lignes :
  - il faut deux points (ou un point et une direction) pour déterminer une droite, une demi-droite ;
  - pour un segment, il faut deux points ou un point et une longueur sur une demi-droite déjà tracée ;
  - il faut deux points pour déterminer un cercle (le centre et un point du cercle) ou un point et une longueur.
- Sur l’exemple, on peut identifier des points qui permettent de définir les lignes :
  - la donnée de A, B, C, D (le quadrilatère) détermine six droites dont les intersections donnent deux nouveaux points E et F.
  - Le choix de G sur (EF) détermine les petits triangles



Reconnaître et reproduire un polygone de la maternelle à la 6ème



Il faut reporter au moins un angle si on suit le bord ou ajouter un triangle appuyé sur une diagonale.

- Les moyens de reconnaissance et de production d'une figure évoluent radicalement au cours de la scolarité obligatoire.
- Les premiers moyens reposent sur une vision surface. La reproduction à la règle et à l'équerre peut se contenter d'une vision lignes.
- Pour comprendre et justifier la reproduction d'un triangle au compas à partir des longueurs des côtés, il faut voir un point comme intersection de lignes et voir le cercle comme un ensemble de points à une distance donnée du centre.

Des objectifs pour le cycle 3

- Au cours de la scolarité obligatoire il y a deux tournants majeurs à gérer dans le mode de définition des figures :
  - Au cycle 2 et au début du cycle 3 : il faut passer de la seule perception au contrôle des propriétés par des instruments.
  - Au cycle 3 et au début du cycle 4 (fin du primaire et collège) : il faut passer du contrôle par les instruments au contrôle par les énoncés.
- Travailler le report de grandeurs sans passer par la mesure
  - Essentiel d'aborder les opérations sur les grandeurs géométriques indépendamment de leur mesure pour qu'elles puissent servir d'appui pour la construction des nombres.
  - Quand c'est nécessaire, la taille des figures est fixée par des longueurs données par des segments et non par leur mesure.
  - Nous nous intéressons aux instruments de tracé et de report de longueur ou d'angle et non aux instruments de mesure (les graduations des règles, équerres ou rapporteurs).
- Bien sûr il est important d'étudier aussi la mesure.

Fonction des instruments de tracé

- Les instruments de tracé, règle, équerre, compas, jouent un rôle essentiel dans le passage du contrôle des figures par la seule perception au contrôle par les énoncés.
- Des instruments théoriques définis par une seule fonction liée à la conceptualisation d'une notion géométrique précise.
  - Règle, reporteur de longueur, médiateur de segment, équerre, reporteur d'angle, compas comme traceur de cercles.
- D'autres instruments qui permettent de reporter de l'information D2
  - Gabarits et pochoirs : toute l'information sur une figure simple
  - Papier calque : toute l'information sur une figure simple ou composée
  - Gabarit ou pochoir déchiré : une partie de l'information D2 sur une figure simple.
- Les instruments matériels sont limités, les instruments théoriques non.

Reproduction et construction de triangles du cycle 2 au cycle 3

- Le triangle, une forme essentielle : rigide et tout polygone se décompose en triangles.
- Rôle particulier des triangles rectangles : utiliser les connaissances sur le rectangle
- Maternelle : triangle comme surface qui a 3 sommets et 3 bords droits. Reproduction avec des gabarits. Problème du retournement si non isocèle
- Cycle 2 : voir les droites supports des côtés ou 3 points non alignés comme déterminant le triangle. Gabarits où il manque des coins (1 coin, 2 coins, 3 coins); joindre des points dans un ordre donné.
- Cycle 3 : connaissance des propriétés des triangles particuliers, construction à la règle et à l'équerre, avec des reports de longueur et des gabarits d'angle, à la règle et au compas. En $6^{ème}$ ou $5^{ème}$: quelles informations sont nécessaires pour construire un triangle ?

Progression au cycle 4

Proposition d'une progression en géométrie plane au cycle 4:

- Cohérente par rapport aux programmes et aux apprentissages des élèves
- Qui place les triangles isométriques au cœur de l'apprentissage de la démonstration
- Non testée entièrement en classe (progressions communes dans les établissements)

- 5ème
  - Inégalité triangulaire
  - Introduction des cas d'isométrie des triangles et utilisation : retour sur la médiatrice, les triangles isocèles, concours des médiatrices et cercle circonscrit
  - Angles et parallèles. Somme des angles d'un triangle.
  - Parallélogramme, et démonstrations avec les cas d'isométrie
  - Symétrie centrale
  - Quadrilatères particuliers (ou en 4ème)

Progression au cycle 4

4ème

- Exercices utilisant les cas d'isométrie (permettant de démontrer des propriétés déjà vues, ou de découvrir de nouvelles propriétés, telles que des longueurs égales ou un cas de perpendicularité)
- Théorème de la droite des milieux et sa réciproque
- Théorème de Pythagore et sa réciproque
- Première approche de translation et rotation avec Geogebra
- Première approche du cosinus ?

Progression au cycle 4

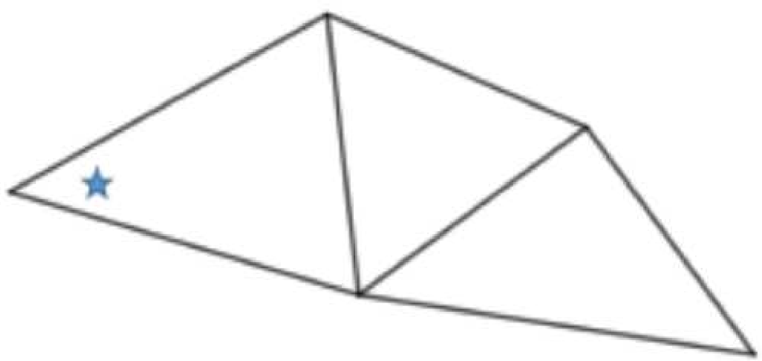
- 3ème
  - Thalès et sa réciproque. Démonstration par les aires
  - Notion d'homothétie en lien avec Thalès
  - Triangles semblables. Application : relations métriques dans le triangle rectangle
  - Trigonométrie : justification du fait que les rapports ne dépendent que de l'angle et pas du triangle à l'aide des triangles semblables. On peut aussi justifier les relations métriques dans le triangle rectangle en termes de trigonométrie.
  - Repère orthonormé. Equation d'une droite en lien avec proportionnalité et Thalès.

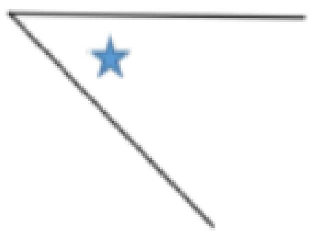
Deux exemples à discuter

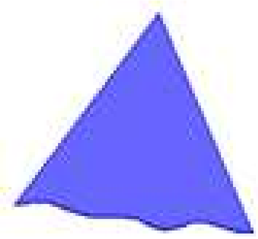
- Reproduction et construction de triangles avec des instruments
  - A partir de reproductions de figures proposées à des classes de CM1 ou CM2, proposer des activités pour des élèves de sixième. Discuter les choix des variables didactiques en fonction des objectifs visés.
- Démonstration en utilisant les cas d'égalité des triangles
  - Faire une analyse a priori de l'exercice sur le cerf-volant

Des exercices proposés en CM1 ou CM2

- Reproduire la figure à partir de l'amorce.
- Instruments : règle non graduée ; outil de report de longueur ; gabarits.

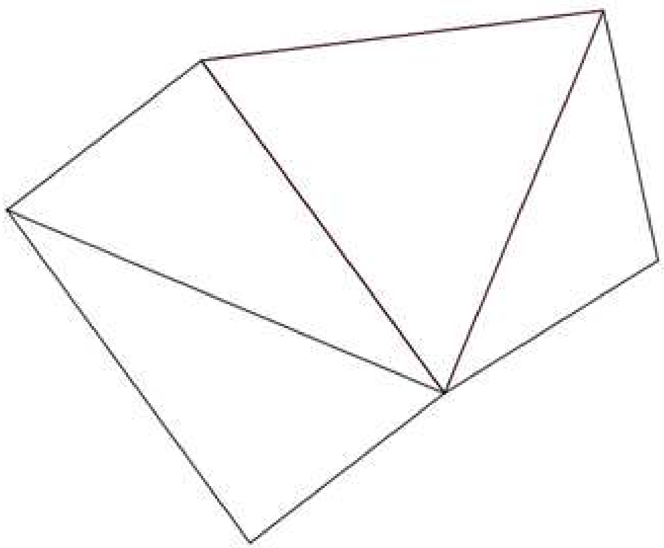


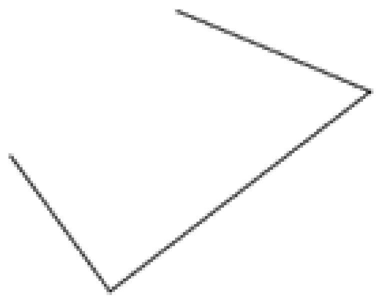


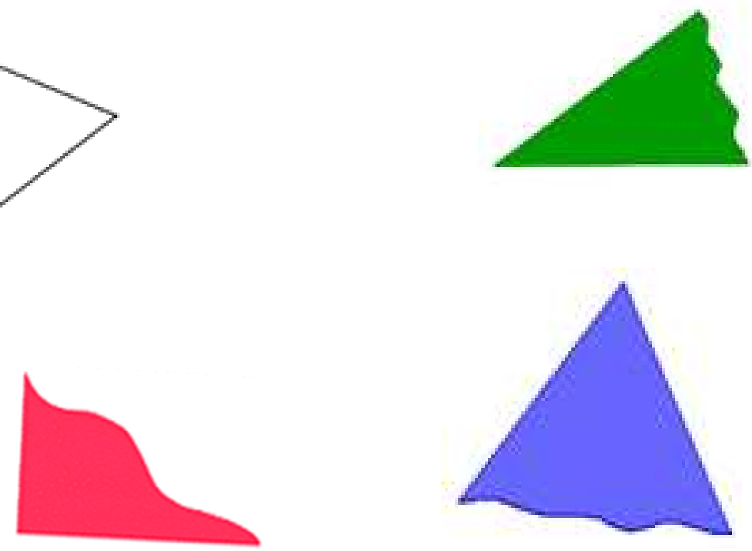


Exercices proposés en CM2 REP+

- Reproduire la figure à partir de l'amorce.
- Instruments : règle non graduée ; gabarits d'angles.







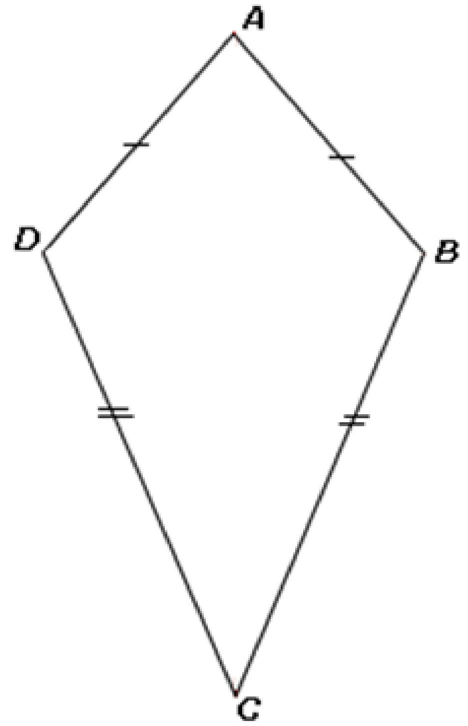
Exercice proposé en 4ème

- On appelle cerf-volant un quadrilatère qui a deux paires de côtés consécutifs égaux.
- Soit ABCD un cerf-volant :
- 1. Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous faire concernant la figure ?

  Il semble que………………………………………………………

→ Appelez le professeur pour vérifier vos conjectures

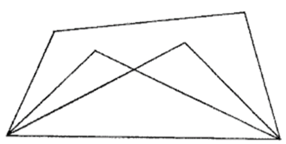
- 2. Essayez de démontrer ces conjectures, en détaillant toutes vos étapes. Ecrivez vos raisonnements même si ils sont faux pour finir… N'effacez rien !

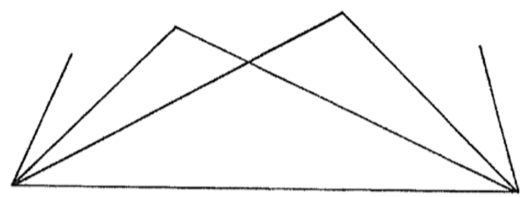


Discussion

Restauration de figures en 6ème ?

- Variables didactiques des exercices
  - Dans le premier, il faut reporter une longueur pour le premier triangle isocèle ; ensuite on construit des triangles à partir de leurs angles.
  - Il faut repérer que les triangles sont isocèles ou équilatéraux à partir des angles.
  - Dans le deuxième : une difficulté pour le deuxième triangle rectangle : il faut en fait construire le rectangle et donc l'identifier comme réunion de deux triangles rectangles accolés par la diagonale.
  - Les figures sont reproduites à la même échelle, ce qui est nécessaire quand on doit reporter des longueurs mais ne l'est pas quand on ne vérifie que des angles ou qu'on n'utilise que des relations d'incidence.





Des règles d'utilisation pour un usage géométrique des instruments de tracé

- Pour poser sa règle, il faut deux points ou un trait droit déjà tracé
- Pour reporter une longueur avec la règle informable, il faut un support droit et un point de départ sinon il faut un compas qui trace un cercle
- Le milieu d'un segment est aligné avec les extrémités et il se trouve à la même distance de ces deux extrémités ; on reporte la longueur du segment sur le bord droit de la bande ; on la plie en faisant coïncider les deux extrémités, on obtient une longueur moitié que l'on peut reporter à partir d'une des extrémités du segment, vers l'intérieur.
- Pour tracer un cercle, il faut un point (centre) pour poser la pointe du compas et un autre point pour placer la mine ou une longueur (rayon) qui donne l'écartement des branches.
- Pour poser son équerre il faut une droite sur laquelle poser un côté de l'angle droit.
- Pour reporter un angle, il faut poser un côté du gabarit sur une demi-droite qu'on a déjà avec le sommet sur un point qu'on a déjà ; on peut reporter d'un côté ou de l'autre de cette demi-droite.
- La règle à bords parallèles se pose sur une droite qu'on a déjà.

C'est aussi un apprentissage essentiel que l'on vise dans les restaurations de figures et que l'on peut institutionnaliser en 6ème.

Analyse a priori de l’exercice sur le cerf-volant

- Plusieurs tracés et plusieurs conjectures possibles
  - Tracé de [AC] ; conjectures : (AC) est un axe de symétrie ; les triangles ABC et ADC sont égaux.
  - Tracé de [BD] ; conjecture : les triangles ABD et CBD sont isocèles d’où égalités d’angles...
  - Tracé des deux diagonales ; intersection en H ; conjectures : les diagonales sont perpendiculaires ; H est le milieu de [BD] ; les triangles ABH et ADH sont égaux ; les triangles CBH et CDH sont égaux…
- Plusieurs démonstrations possibles et difficultés
  - Egalité des triangles ABD et ADC par le 3ème cas mais difficulté du côté commun (il n’y a pas de marque). En se servant des triangles isocèles, on peut utiliser le 3ème cas
  - Difficulté pour conclure à l’angle droit comme moitié d’angle plat
  - Difficulté d’organiser la démarche

Ce qu'ont fait les élèves

DBC est isocèle et [AC] est la bissectrice de c donc, o est au centre de [DB].

$\widehat{DOB}$ est un angle plat ~~de~~ et [AC] est la bissectrice de c donc, o a au moins 2 angles droits donc tous ses angles droits.

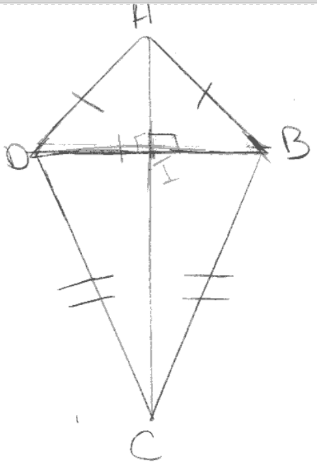
La longueur [CD] et [BC] sont pareils, [DA] et [AB] sont les mêmes et [CA] fait partie des deux triangles donc, DAC et ABC sont isométriques

Ce qu'ont fait les élèves

1. Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous faire concernant la figure ?

Il semble que AB et AD sont de même mesure et que si on trace un segment de D à B sa fait un triangle isocele pareille pour CBD. Ses diagonales sont perpendiculaires. DAB peut être triangle equilateral. il ya 2 triangles dans le quadrilatere ADC et ABC.

→ Appelez le professeur pour vérifier vos conjectures



1. ABC est symetrique à ADC car :

- AB à la même mesure que AD
- BC a la même mesure que DC
- la dernière mesure est AC donc c'est forcément egal.

Ce qu'ont fait les élèves

1. ABC repose sur la même base (a) que ADC donc ABC est isometrique par rapport à ABC

2. DAO = ABO car ils ont trois longueurs en commun donc ils sont isometrique

3. DOC = CBO car ils ont trois longueurs en commun donc ils sont isometrique

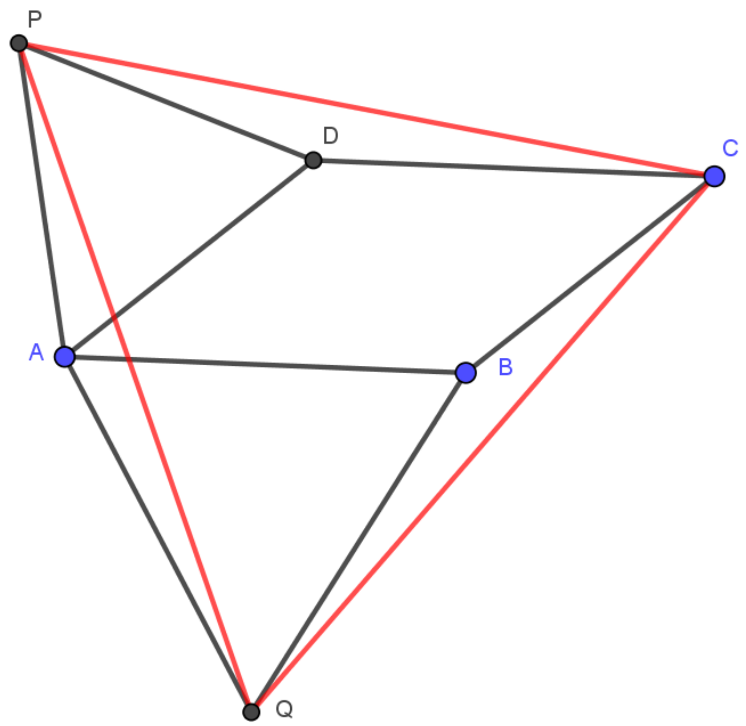
4 DOB = 180° AOC = 180° / DB coupe AC en son milieu donc
$\widehat{AOB} = 90°$, $\widehat{DOA} = 90°$, $\widehat{DOC} = 90°$, COB = 90°

5. (d) coupe $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DCB}$ en leur milieu c'est pour cela que ADC = ABC

6.

Un exercice fait quelques mois après

Soit ABCD un parallélogramme.
On construit, à l'extérieur de ABCD, les triangles équilatéraux ADP et ABQ.
Que peut-on dire du triangle PQC ?



Les points homologues

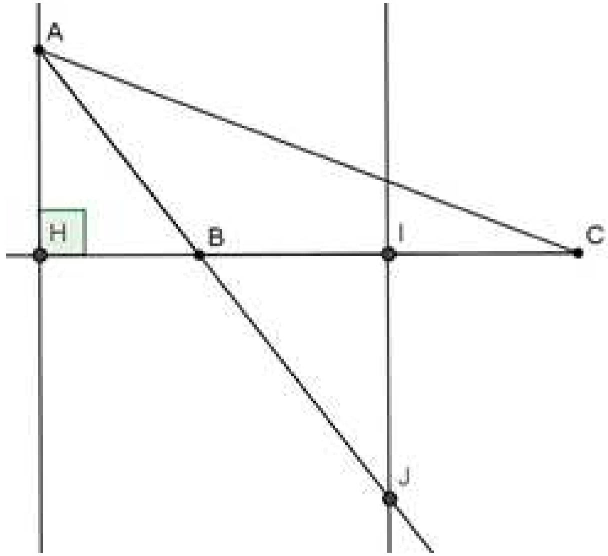
- Faut-il entraîner les élèves à repérer les éléments homologues ?
- Le professeur doit-il autant que possible nommer les triangles égaux en respectant les côtés homologues ?

Codage des figures dans la géométrie des tracés

- Codage d'une figure par des signes ou par un texte.
- Cas d'une reproduction ou d'une restauration
  - Si la prise d'information directe sur le modèle est possible, le codage n'est pas nécessaire mais il peut servir à mémoriser des propriétés qu'on a déjà vérifiées ou qu'on se propose de produire.
  - Il devient nécessaire dans une situation de communication si l'un des acteurs ne dispose pas de toute l'information.
- Cas d'une construction de figure :
  - Les propriétés de la figure sont données sous forme de texte ou de schéma à main levée codé ou par une combinaison des deux.
  - Au fur et à mesure de la construction, le code pourra ensuite indiquer les propriétés utilisées sur la figure en cours de réalisation.
  - Il se peut qu'on ne puisse pas réaliser directement les propriétés qu'on cherche mais qu'on puisse les obtenir comme conséquences d'autres propriétés
  - Une fois la construction réalisée, les autres propriétés demandées et non utilisées dans la construction sont vérifiées avec les instruments et éventuellement codées également.

Codage des figures dans la démonstration : un exemple

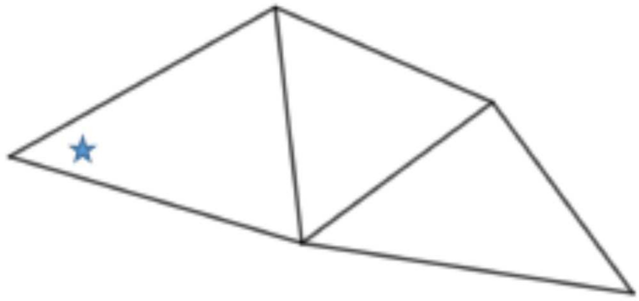
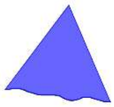
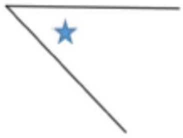
Soit un triangle ABC, non rectangle en B. (AH) est une hauteur du triangle ABC et I est le milieu de [BC]. La parallèle à (AH) passant par I coupe (AB) en J. Démontrer que le triangle BJC est isocèle en J.



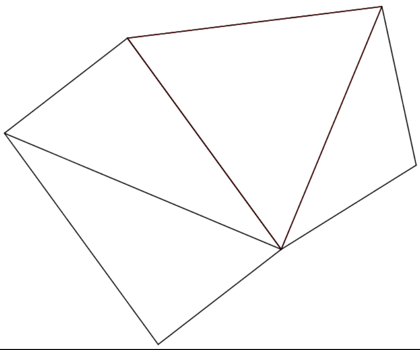
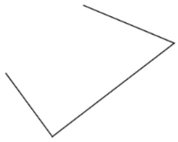
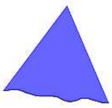
- Angle en B aigu ou obtus, mieux visible si [BC] horizontal
- H sur (BC) non dit dans le texte
- Comment tracer et coder la parallèle à (AH) passant par I ?
  - Tracé à l équerre ou utilisation de la propriété : si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles.
  - Tracé avec un logiciel de géométrie ou par glissement d'un gabarit : utilisation du théorème réciproque.
- Quelle rédaction exiger des élèves ?

Exercices proposés en CM1 ou CM2 REP+

1. Reproduis la figure en utilisant les gabarits, le compas et la règle non graduée

	**Gabarits**   **Amorce** 

2. Reproduis la figure en utilisant les gabarits, le compas et la règle non graduée

Figure modèle	Amorce
	
Gabarits	
  	

3. Avec les mêmes gabarits tracer des triangles dont un côté est donné :

Un modèle est fourni et un coté est déjà tracé

Exercices de 4ème

Séance 1

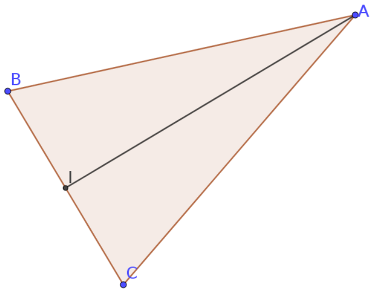
Figures téléphonées : les élèves tracent un triangle de leur choix, et doivent faire reproduire (ou simplement décrire) aux autres élèves ce triangle avec le moins d'indications possibles.

Séance 2

Institutionnalisation : énoncé des cas d'égalité des triangles et exercices d'application directe

Séance 3 :

On a tracé un triangle ABC isocèle en A. On a tracé la bissectrice de l'angle, c'est-à-dire la droite qui partage l'angle en deux angles égaux. Cette droite coupe [BC] en I.



1. Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous faire concernant la figure ?

Il semble que …………………………………………………………………………………

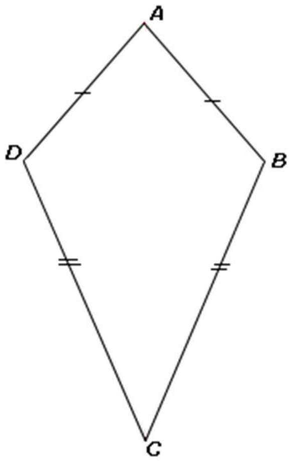
→ Appelez le professeur pour vérifier tes conjectures

2. Essayez de démontrer ces conjectures, en détaillant toutes vos étapes. Ecrivez vos raisonnements même si ils sont faux pour finir… N'effacez rien !

Séance 4 :

On appelle cerf-volant un quadrilatère qui a deux paires de côtés consécutifs égaux.

Soit ABCD un cerf-volant :



1. Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous faire concernant la figure ?

Il semble que …………………………………………………………………………………

→ Appelez le professeur pour vérifier vos conjectures

2. Essayez de démontrer ces conjectures, en détaillant toutes vos étapes. Ecrivez vos raisonnements même si ils sont faux pour finir… N'effacez rien !