# Le repère cartésien

Des situations (lycée)

Pour travailler les enjeux du repère cartésien

# Le groupe IREM Didactique de Montpellier

- Aurélie Chesnais
- Sophie Dutaut, Lycée Feuillade Lunel
- Aurélien Destribats, Collège de Sérignan
- Emeric Gosselin, Lycée Dhuoda (Nîmes)
- Jérôme Leberre, Lycée Dhuoda (Nîmes)
- Elodie Herrmann, Collège de Montpellier

- Véronique Cerclé, Lycée Jean Moulin (Pézenas), PFA
- Louise Nyssen (I3M, FDS, Université de Montpellier)

# Notre questionnement

- Les difficultés / enjeux liés à la géométrie repérée (CF article en préparation)

- Des situations permettant de travailler ces enjeux (en classe)
  - Résoudre l'équation 3x-2y=5 (ou y=3x-2)
  - Les rectangles d'aire 10 $cm^2$
  - La représentation graphique de t -> $t \mapsto \sqrt{25 - t^2}$

- Des situations pour la formation

# Notre questionnement

- L’entrée dans la géométrie repérée en seconde
  - au collège : de la géométrie euclidienne / du repérage (représentation de données et fonctions)
  - en seconde : on fait de la géométrie dans le repère (milieu, distance, alignement, parallélisme, figures)
  -> en seconde : mélange de cardes

- Des situations  permettant de travailler ces enjeux (en classe)
  - Résoudre l’équation 3x-2y=5 (ou y=3x-2)
  - Les rectangles d’aire 10 cm²
  - La représentation graphique de t -> $t \mapsto \sqrt{25 - t^2}$

# Notre questionnement

- un enjeu de la géométrie repérée
  - Lieu de rencontre entre différents objets et cadres (géométrique, numérique, fonction) , avec la richesse du registre graphique : faire de la géométrie dans un repère mais plus que ça
- Quelques difficultés de la géométrie repérée
  - Abscisse comme nombre position et nombre longueur
  - La courbe comme ensemble de points
  - Les codes du registre graphique
  - La ligne continue

# Plan

- La représentation graphique de t -> $t \mapsto \sqrt{25-t^2}$

→ Un enjeu lié à la géométrie repérée : le repère cartésien comme objet mathématique

- Les rectangles d'aire 10 cm²

→ Un enjeu lié à la géométrie repérée : la droite réelle

→ Ces situations  permettent de travailler ces enjeux
  - Du côté de l'élève (en classe)
  - Du côté du savoir (en formation)

la première situation
"la représentation graphique

$$t \to f(t) = \sqrt{25 - t^2}$$"

# la première situation

## "la représentation graphique $t \to f(t) = \sqrt{25 - t^2}$"

- Question en seconde : tracer la RG de f dans un repère orthonormé
- Question en 1S : comment savoir si un point appartient au demi-cercle ?
- Question en terminale : calculer $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - t^2}\, dt$ (après avoir défini une intégrale comme aire du domaine)

# la première situation

## "la représentation graphique $t \to f(t) = \sqrt{25 - t^2}$"

- analyse a priori : quels enjeux ? qu’est-ce qu’on veut travailler dans cette situation ? (relation élève / maths : questionnement de l’enseignant)
    - Enjeux liés à la problématique du repère cartésien
    - Autres enjeux

- les questions qui se posent au professeur de maths (relation prof / maths : questionnement de formateur)

- les questions qui se posent par rapport au repère cartésien ?

# la première situation

## "la représentation graphique $t \rightarrow f(t) = \sqrt{25 - t^2}$"

- Video
- -> l'élève confond rayon / hauteur
- -> il faut assimiler l'image y=f(x) ) (nombre position) à la hauteur du triangle (nombre distance)

- La question qui se pose : est-ce un demi-cercle ? les points de la courbe sont-ils sur le demi-cercle ? Le rayon est-il toujours de 5 ?

# la première situation
## "la représentation graphique $t \to f(t) = \sqrt{25 - t^2}$"

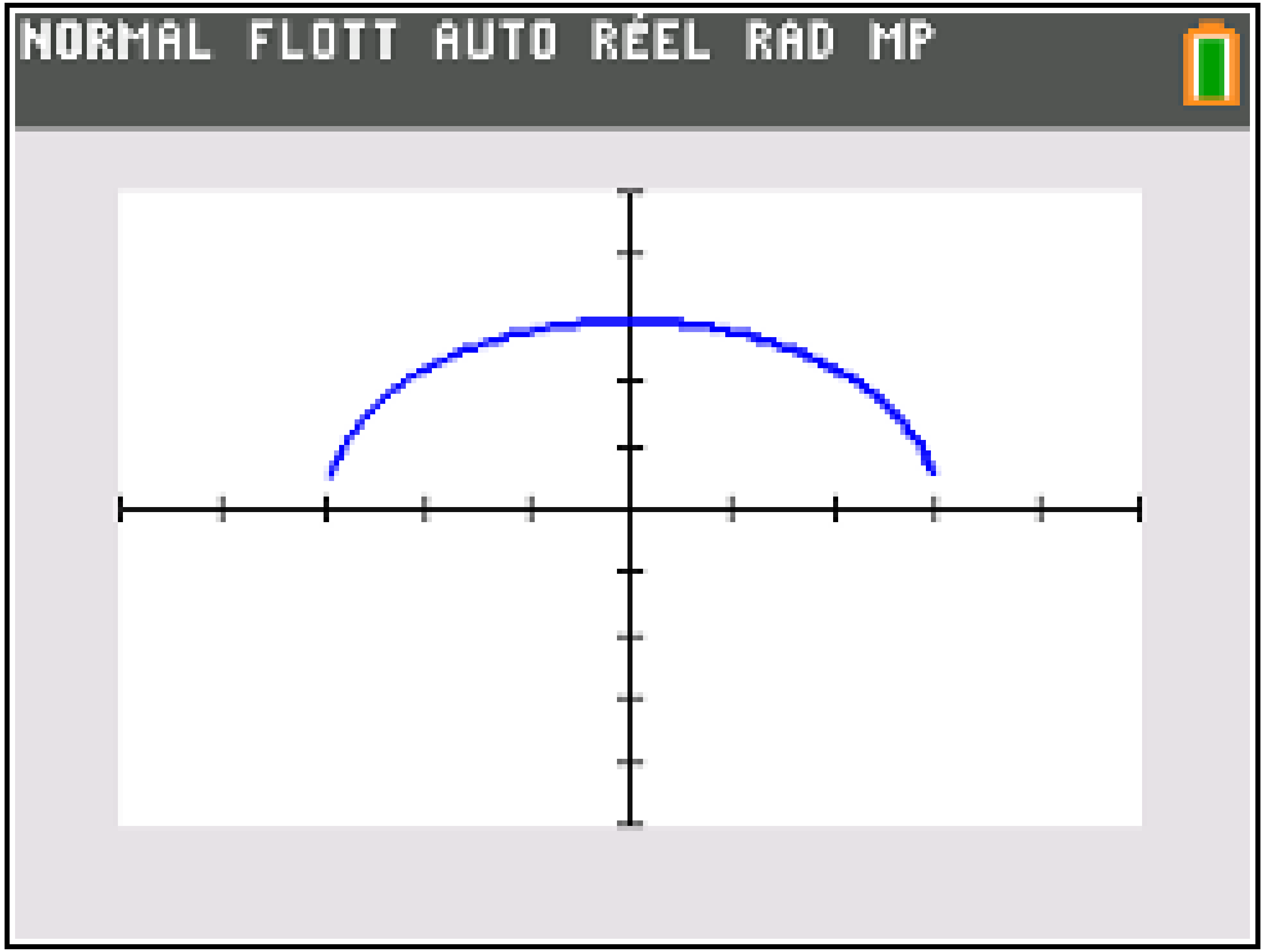
Du côté de la relation élève/savoir :

- Enjeux liés à la problématique du repère cartésien :
  - Courbe comme ensemble de points (chercher des points pour tracer, choisir des points pour tester l’appartenance au cercle)
  - caractérisation d’un cercle (points à distance constante)
  - Calcul d’une distance dans un repère -> Pythagore, formule -> nécessité repère orthonormé quand on parle de distance
  - abscisse position / abscisse distance
- Autres enjeux élève :
  - ensemble de définition
  - affichage calculatrice (ellipse, tangente verticale)
  - Preuve par élément singulier -> élément générique
  - utilisation du fait qu’un point a des coordonnées (x ; f(x))

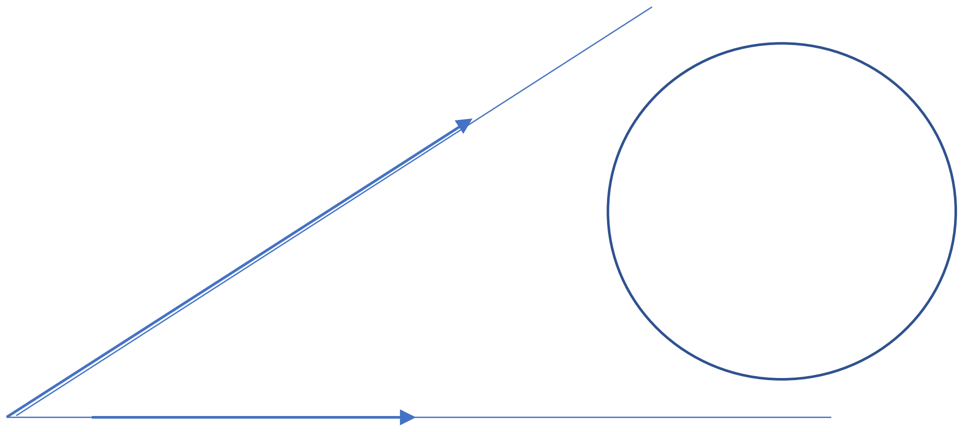
# la première situation
## "la représentation graphique $t \to f(t) = \sqrt{25 - t^2}$"

- Questionnements du prof de maths (enseignement)
  - t ou x ?
  - Repère orthonormé dès le départ ?
- les questions qui se posent professeur en tant que mathématicien (relation du  professeur au savoir)
  - la question du repère objet, cadre, (registre)
  - la question de la notion de courbe : objet ou représentation? Lien entre courbe et repère ?

Cercle ?



# Cercle ?



# la première situation
## "la représentation graphique $t \rightarrow f(t) = \sqrt{25 - t^2}$"

- les questions qui se posent :
  - la question du repère objet, cadre, (registre)
  - la question de la notion de courbe ? objet ou représentation ?

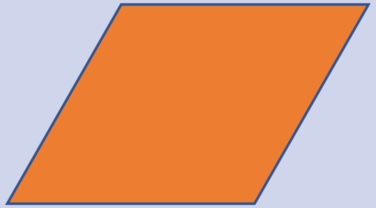
  -> repris dans la deuxième situation
- Questionnement sur le repère cartésien :
  - cadre affine/euclidien
  - construction axiomatique du plan cartésien

# Le repère cartésien

Cadre,  objet

| | Cadre géométrique affine | Cadre numérique |
|---|---|---|
| **Objets :** | Points, droites, figures | Nombres |
| **Problèmes sur les objets** | Géométrie affine : alignement, intersection, parallélisme, barycentre et milieu) | Ordre, opérations, équations et inéquations, extremum,<br>Distance entre deux nombres |
| **Relations fonctionnelles d'objets** | Transformations<br>→ effet sur alignement ? parallélisme ? | Fonction numérique<br>→ effet sur l'ordre ? opérations ? limites ? |
| **Outils** | Théorèmes d'incidence… | Règles algébriques |
| **Registres de représentation** | Langue naturelle<br>Dessin/figure | Langue naturelle<br>Différentes écritures<br>Tableaux |

| | Cadre géométrique+numérique | |
|---|---|---|
| | **Cadre grandeurs et mesure** | **Cadre repère** |
| | 2 points → 1 nombre (mesure= longueur ou mesure algébrique) | 1 point → 2 nombres (coordonnées) |
| **Objets** | Segments mesurés,<br>(surfaces mesurées, angles mesurés) | Points repérés |
| **Problèmes spécifiques sur les objets** | Problèmes de mesures<br>+ problèmes de caractérisation métrique des ensembles de points | Problèmes de coordonnées (intersection)<br>+ problèmes de caractérisation cartésienne d'ensemble de points |
| **outils** | Théorèmes avec mesure (distance ou mesures algébriques) :<br>alignement = inégalité triangulaire ;<br>parallélisme = Thalès ;<br>angle = Pythagore;<br>Théorèmes avec aires | Théorèmes avec coordonnées (alignement ou parallélisme= pdt en croix) |

| | Cadre géométrique+numérique | |
|---|---|---|
| | **Cadre grandeurs et mesure (géométrie euclidienne)** | **Cadre repère (repérage)** |
| **Objets** | Segments mesurés | Points repérés |
| **Axiome fondamental en jeu** | Distance (superposition)  | ?? |

# le plan cartésien comme objet

- construction axiomatique du plan cartésien

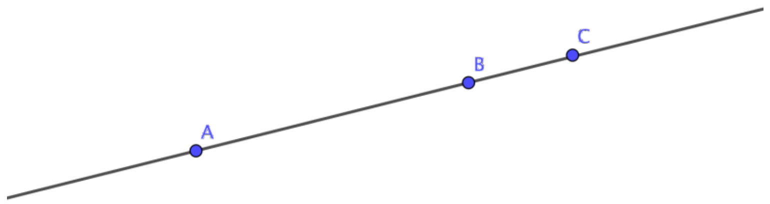
# Le plan cartésien comme objet

- Définition axiomatique des droites dans un plan : le plan $\mathcal{P}$ est un ensemble dont les éléments sont appelés *points*. Dans cet ensemble $\mathcal{P}$ , on distingue des sous ensembles particuliers qu'on appelle des *droites*. Le tout est régi par des axiomes.
- Passer du géométrique au numérique le long des droites du plan : graduer les droites
- Passer du géométrique au numérique dans le plan à l'aide d'un repère : on obtient le plan cartésien.

# Axiome d’incidence

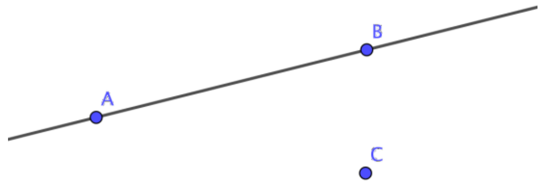
<u>Axiome 1</u> :

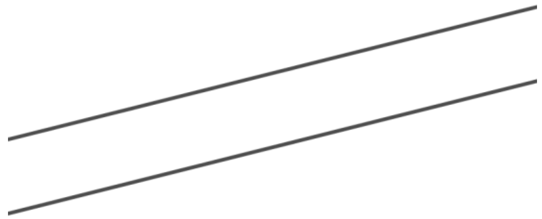
- $\mathcal{P}$ contient au moins deux droites
- Une droite contient au moins deux points
- Deux points déterminent une unique droite

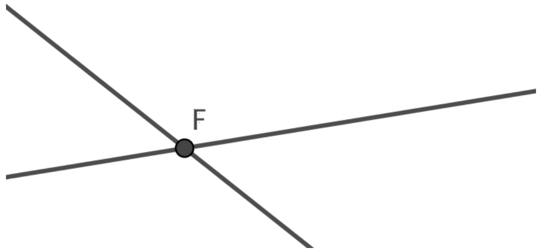



<u>On en déduit</u>

- La notion de points alignés
- L’existence de trois points non alignés
- La notion de parallélisme.

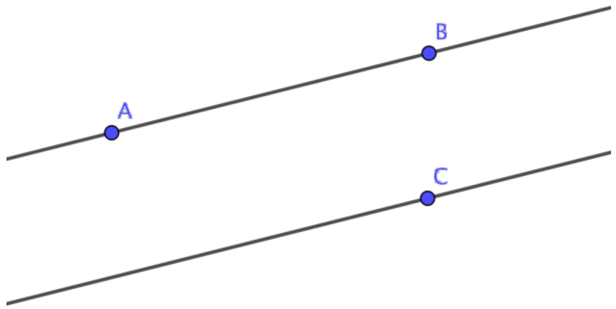




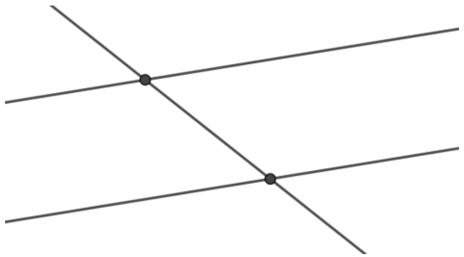

# Le postulat d'Euclide

- <u>Axiome 2</u> : soient *D* une droite et C un point du plan n'appartenant pas à *(d)*. Il existe une unique droite *(d')* passant par C et parallèle à *(d)*

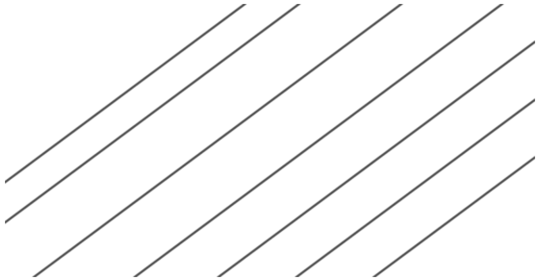



On en déduit

<u>Propriété</u> : soient *(d)* et *(d')*  et *(d'')* trois droites de *P*.  On suppose que *(d)* et *(d')* sont parallèles. Dans ces conditions, si *(d'')* coupe *(d)* elle coupe aussi *(d')* .



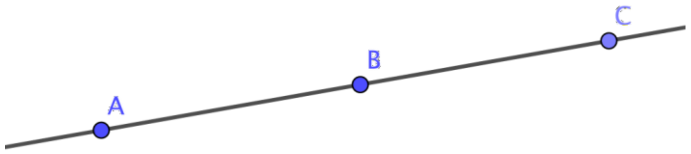
Le parallélisme est une relation d'équivalence. Une classe de cette relation s'appelle une direction.



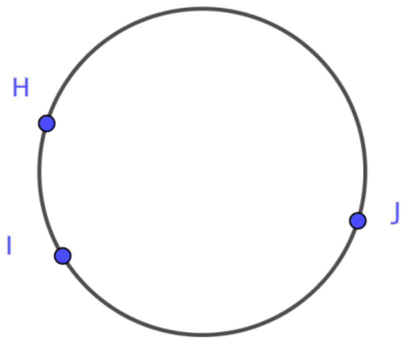
# Ordre

- <u>Axiome 3</u> : On suppose qu'il existe une relation, notée *R*, entre les éléments de $\mathcal{P}$ et ceux de $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ (« si B est en relation avec A et C, on dit que B est entre A et C ») qui vérifie les propriétés suivantes
  - Si le point B est entre les points A et C, alors A, B et C sont alignés, deux à deux distincts
  - Si le point B est entre les points A et C, alors *B* est aussi entre *C* et *A*
  - Pour tous points A et B, distincts, il existe un point C tel que B est entre A et C
  - Pour trois points alignés distincts, il n'y en a pas plus d'un qui est entre les deux autres.

☺



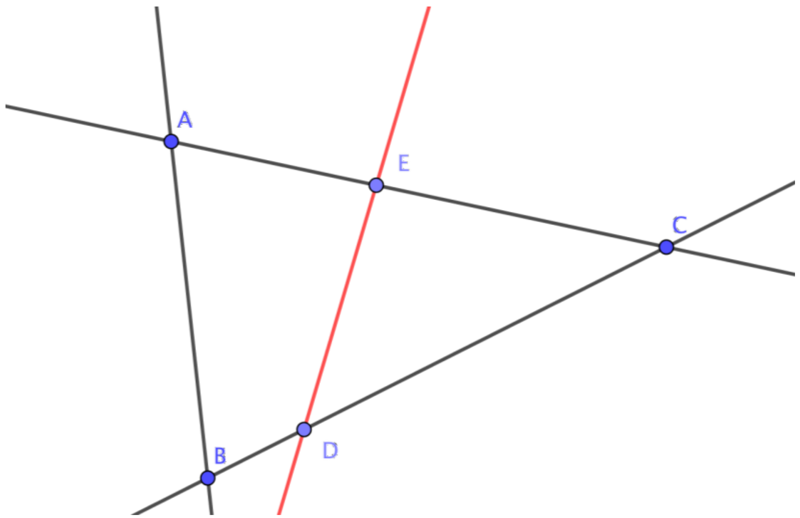

☹




On en déduit la notion de segment

# Ordre

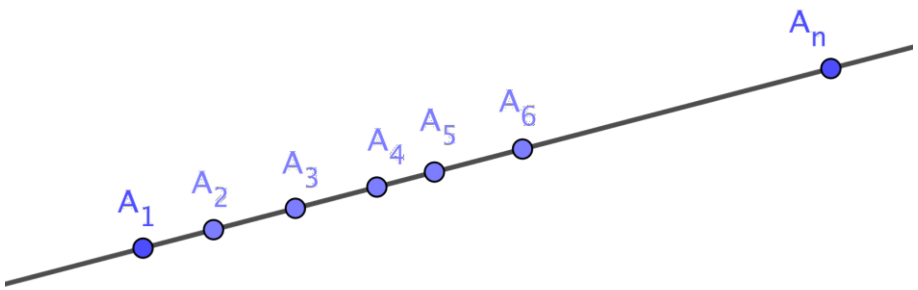
Axiome de Pasch : soient *A*, *B*, et *C*, trois points non alignés dans $\mathcal{P}$ et *(d)* une droite qui ne passe par aucun de ces points. Si *(d)* passe par un point du segment *]B,C[* , elle passe par un des points du segment *]A,B[* ou par un point du segment *]A,C[*

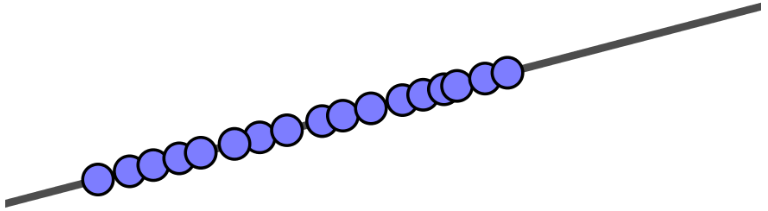



On en déduit

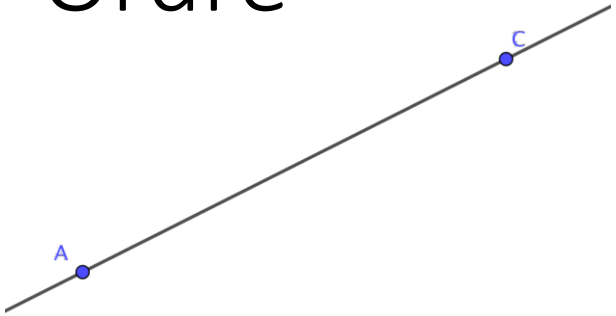
- entre deux points distincts, il existe toujours un point (voir diapo suivante)
- possibilité de ranger n points d'une droite
- entre deux points d'une droite il y a une infinité de points

Question : quel infini?

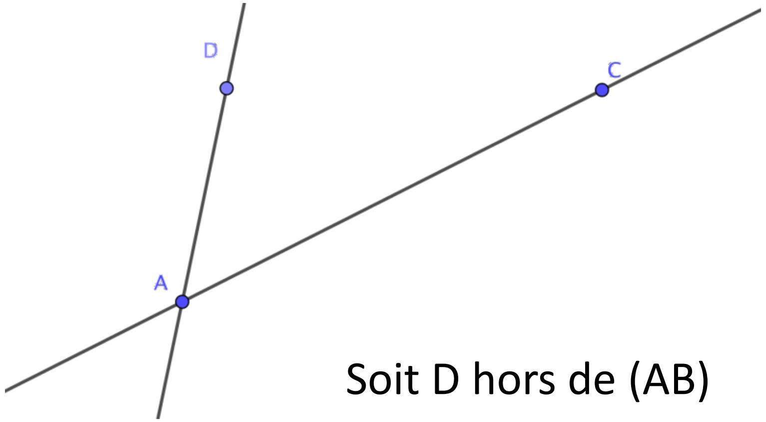


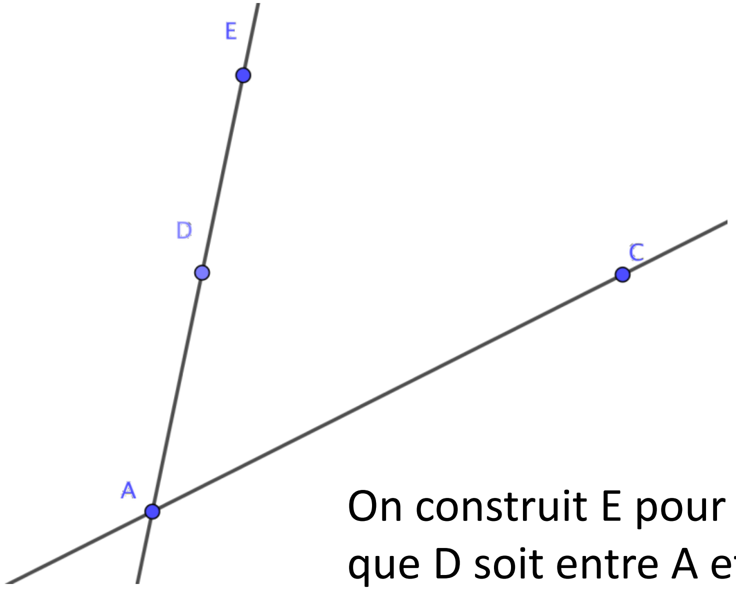
# Ordre



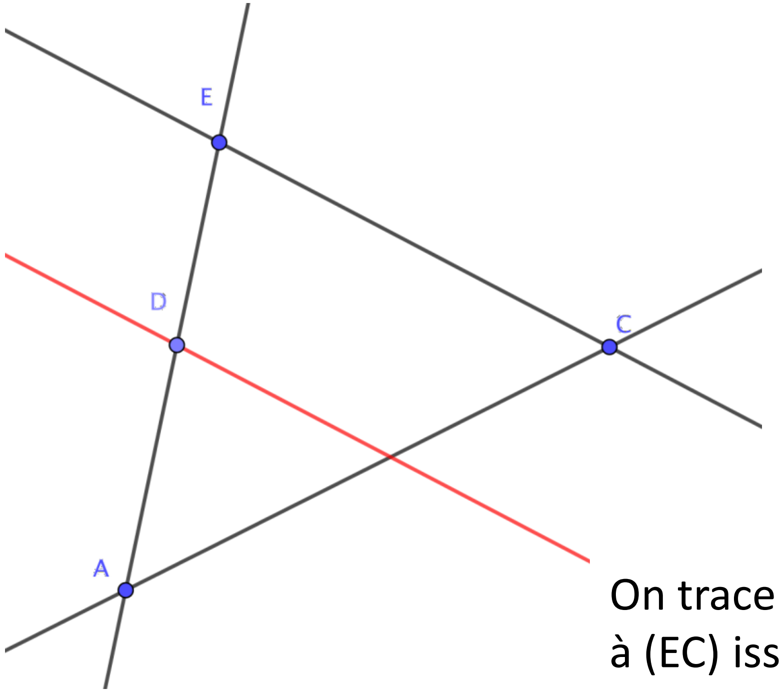

Soient A et C distincts



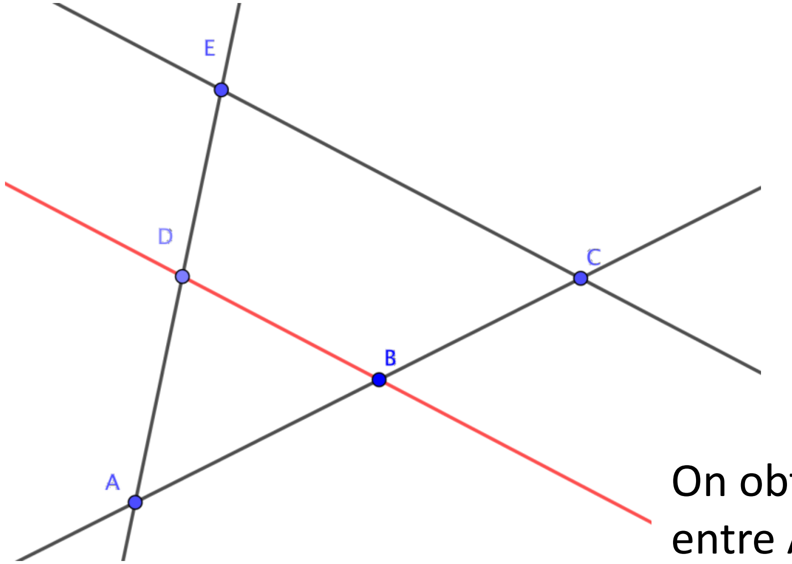

Soit D hors de (AB)




On construit E pour
que D soit entre A et E




On trace la parallèle
à (EC) issue de D




On obtient B
entre A et C

# Graduation

<u>Axiome</u> : toute droite (d) du plan est équipée d’une graduation, c’est-à-dire qu’il existe une bijection

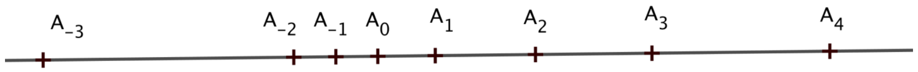
$$f : (d) \rightarrow R$$

qui respecte l’ordre.

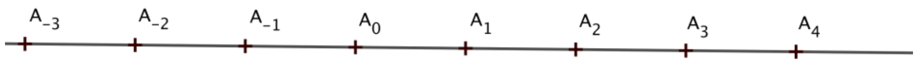
<u>Définition</u> : une graduation permet de définir une mesure algébrique grâce à la formule

$$\overline{AB} = f(B) - f(A)$$

<u>Représentation:</u>



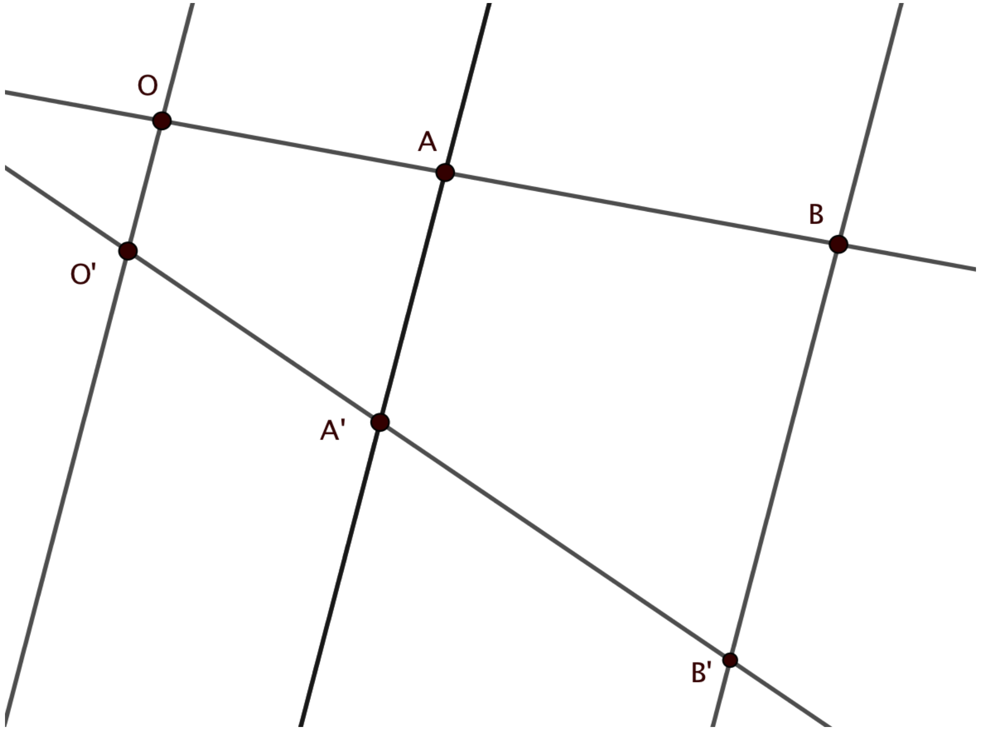

ou



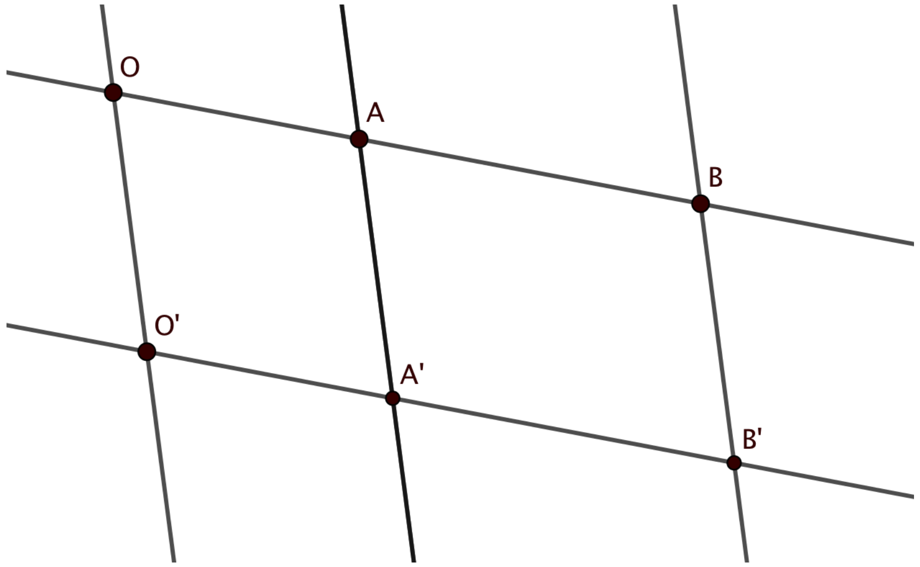
# Axiome de Thales

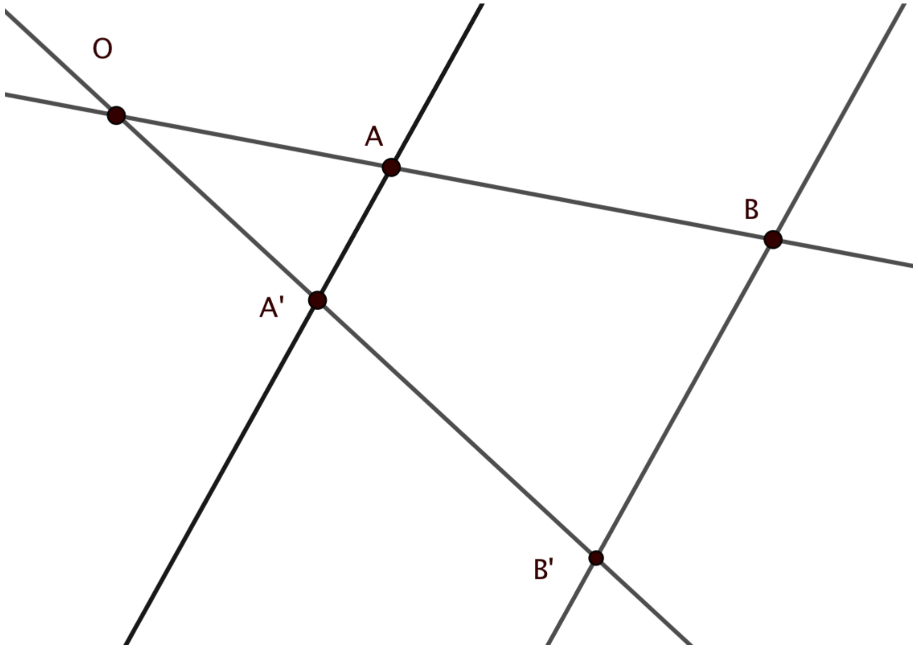
- <u>Axiome</u> : soient *(d)* et *(d')* deux droites distinctes de *P*. Soient 0, A, B et C trois points de *(d)* et 0',A',B' trois points de *(d')*. On suppose que $A \neq A'$ et que $B \neq B'$. On suppose aussi que si $O \neq O'$ les droites (OO') et (AA') sont parallèles. Alors

- $A'B' // (AB) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\overline{O'B'}}{\overline{O'A'}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$



# Axiome de Thales




- Cas où (d)//(d’)

Cas où (d) et (d’) sont sécantes

# Un exemple

- On prend comme plan **R**x**R**
- Les points sont des couples de réels
- Les droites sont les ensembles de la forme suivante :

{(x,y)dans **R**x**R** |ax+by=c}

où a,b et c sont trois nombres réels tels que a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Alors **R**x**R**, avec cet ensemble de droites, vérifie tous les axiomes précédents.

# Un exemple

On peut tout démontrer de façon purement numérique, sans faire un seul dessin.

Par exemple si on a deux droites données par des triplets de réels (a,b,c) et (a’,b’,c’), elles sont

- disjointes : si $ab'-ba' = 0$ et $ac'-ca' \neq 0$
- sécantes : si $ab'-ba' \neq 0$
- confondues : si $ab'-ba' = 0$ et $ac'-ca' = 0$

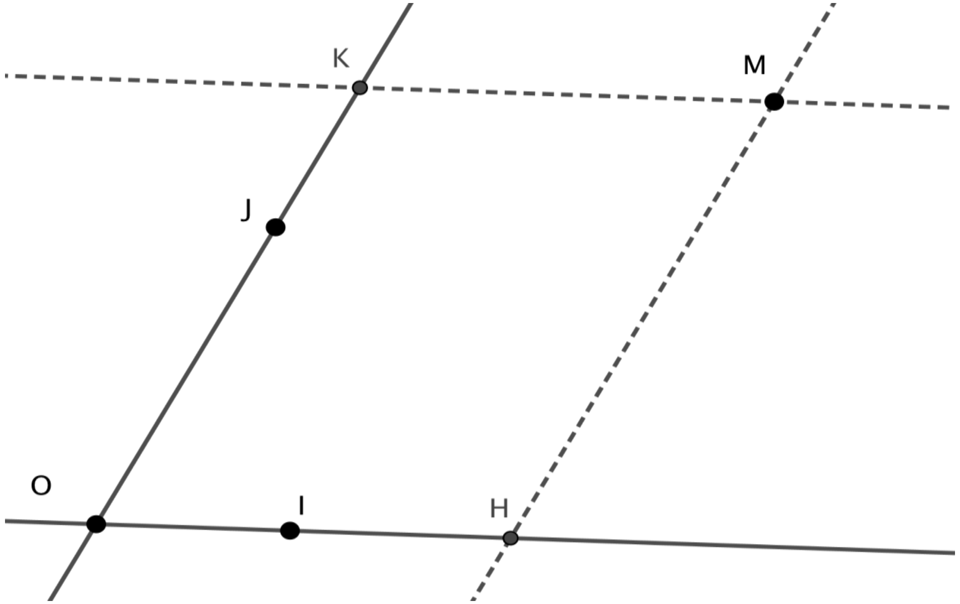
# Construction d'un repère à partir de 3 points non alignés.

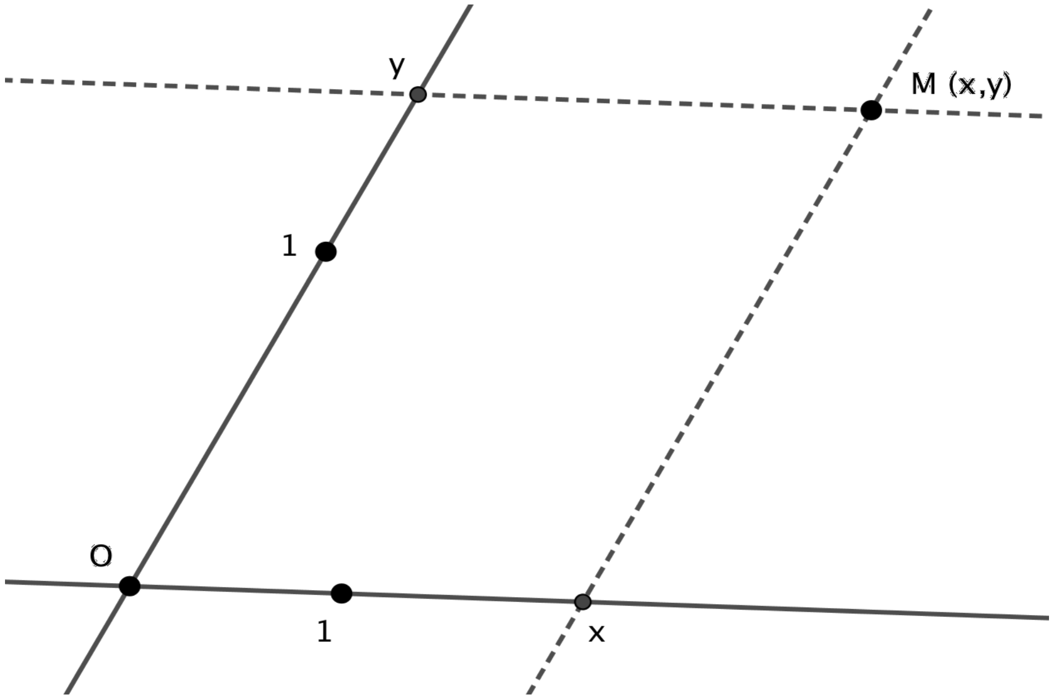
On veut maintenant construire une bijection affine entre un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et **R**x**R** . On peut le faire grâce à un repère

- <u>Définition</u> : un repère du plan est un triplet *O,I,J* où O, I et J sont trois points non alignés de $\mathcal{P}$.

- <u>Propriété :</u> un repère permet de construire une bijection entre $\mathcal{P}$ et ***R×R***

# Construction du repère




Bijection entre $\mathcal{P}$ et (OI)X(OI')

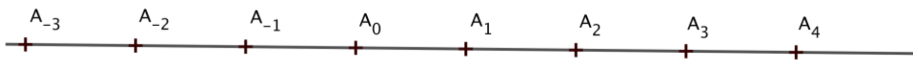
Repère gradué bijection entre $\mathcal{P}$ et RXR

Repère cartésien (affine, quelconque)
repère euclidien (distance, orthonormé)

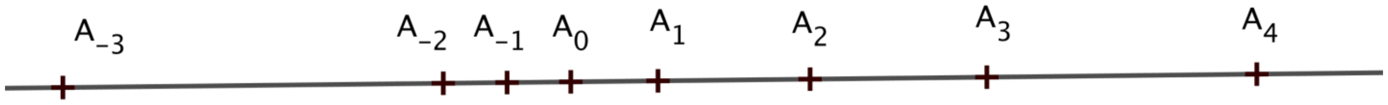
- Nous avons besoin de représenter les objets théoriques définis ci-dessus sur un support : feuille de papier ou tableau. Or, la feuille de papier sur laquelle nous traçons nos figures est aussi un plan affine au sens précédent. Il est muni d'une distance -- la distance physique que nous percevons avec notre œil—qui fait de lui un espace euclidien. Nos représentations sont-elles compatibles avec cette structure euclidienne naturelle ?

# Le repère cartésien

Le repérage sur une droite suppose uniquement la bijection entre D et R :




Mais on peut faire du repérage du repréage sur une droite sans que la graduation  soit « régulière » au sens de la distance physique :



Passons au plan. Soit R=(O,I,J) un repère de *P*.

- Le plan cartésien $\mathcal{P}_R$ est le lieu dans lequel on fait vivre la bijection $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{R}}$ entre *P* et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Les objets du plan cartésien $\mathcal{P}_R$ sont des points repérés M(x;y).

| | Cadre géométrique+numérique | |
|---|---|---|
| | **géométrie euclidienne** | **Plan cartésien** |
| **Objets** | Segments mesurés | Points repérés M(x;y)<br>(un point M + un couple (x;y) |
| **axiome** | Distance (superposition) | Bijection $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{R}}$ entre $\mathcal{P}$ et RXR |

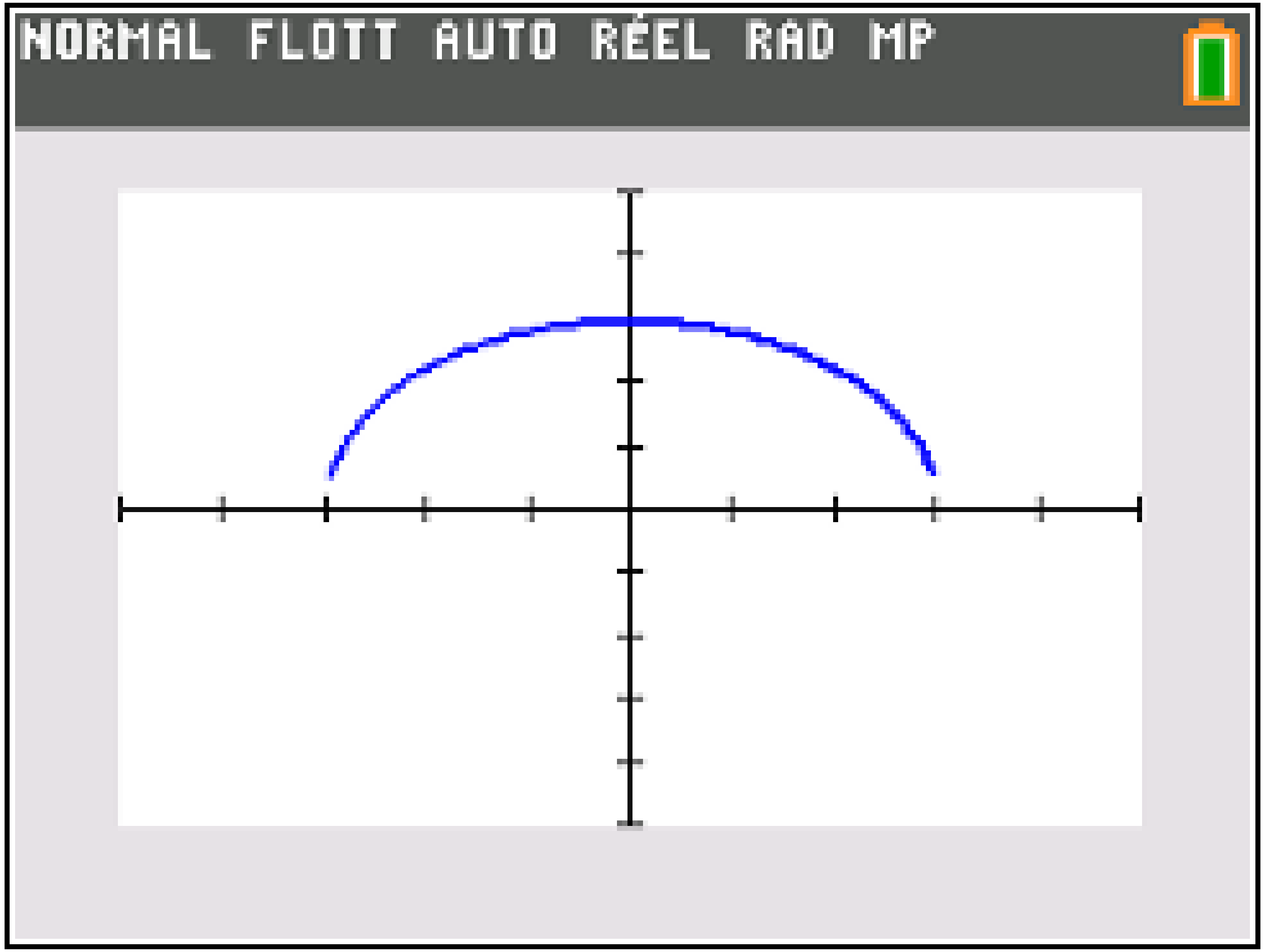
- Nous pouvons définir une distance par la formule

$$\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

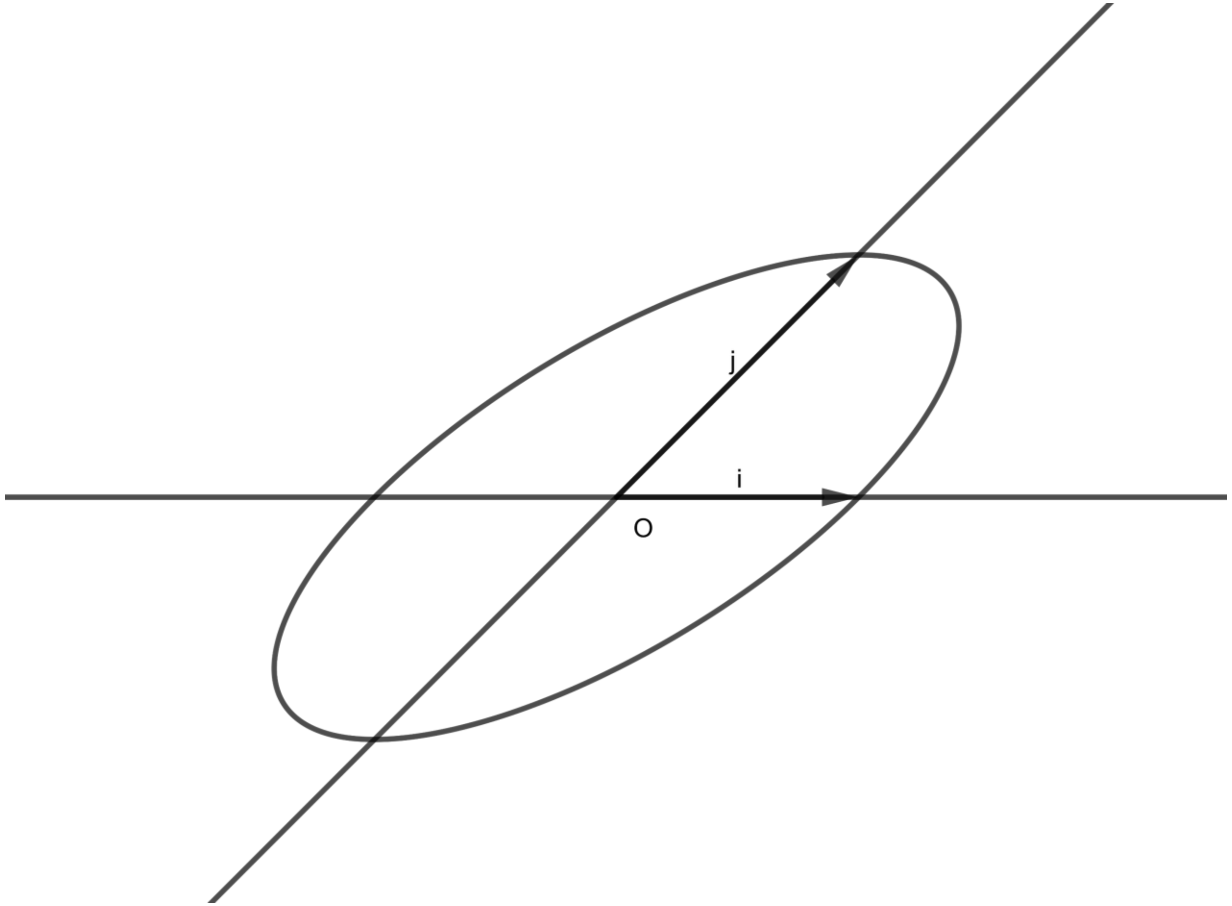
Le repère R est orthonormé pour cette distance.

- On peut alors faire de la géométrie euclidienne (avec distance)
- Mais …

# Cercle !



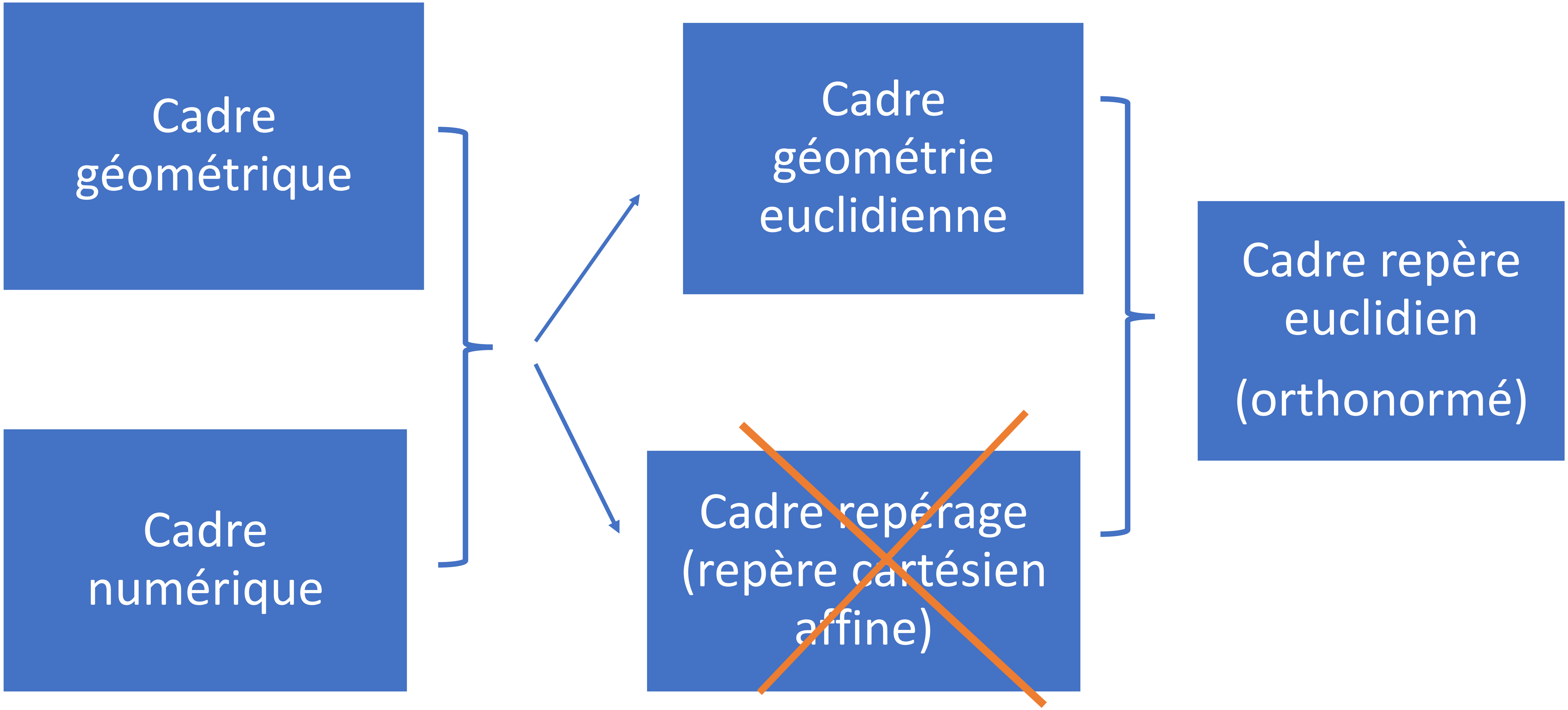
# Cercle !




Pourtant nous ne le percevons pas comme un cercle car le repère R n’est pas orthonormé pour la distance physique.

- C’est pourquoi on choisit habituellement des repères qui sont orthonormés pour la distance physique. Dans un tel repère, la distance calculée par la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ coïncide bien avec la notion de distance mesurable sur notre feuille euclidienne. Les cercles y ont bien la forme attendue.
-
- En toute généralité, on peut appliquer la formule de la distance donnée par un repère quelconque mais la structure euclidienne obtenue ne correspond plus à la distance physique, si bien que nous ne reconnaissons plus nos objets euclidiens familiers …

| | Cadre géométrique+numérique | | |
|---|---|---|---|
| | Cadre mesuré<br>(géométrie euclidienne) | Cadre repéré affine<br>(repère quelconque) | Cadre repéré euclidien<br>(repère orthonormé ?) |
| | 2 points → 1 nombre (mesure) | 1 point → 2 nombres (coordonnées) | Points + mesures + coordonnées |
| **Objets** | Segments mesurés,<br>(surfaces mesurées<br>angles mesurés) | Points repérés<br>(pb on a une distance sur chaque axe mais pas une distance entre deux points qcq) | Points repérés<br>+ segments mesurés |
| **Problèmes spécifiques sur les objets** | Problèmes de mesures<br>+ problèmes de caractérisation métrique des ensembles de points | Problèmes de coordonnées (intersection)<br>+ problèmes de caractérisation cartésienne d'ensemble de points affines (droites, segments, parallélogrammes, milieux) | Idem dans le cadre euclidien (on a en plus distance qcq et angles), les ensembles de points euclidiens sont les coniques, les quadrilatères particuliers… |
| **outils** | Théorèmes avec mesures :<br>alignement = inégalité triangulaire ;<br>parallélisme = Thalès ;<br>angle = Pythagore)<br>Théorèmes avec aires | Théorèmes affines avec coordonnées (alignement ou parallélisme= pdt en croix) | Théorèmes euclidiens avec coordonnées (formule longueur, produit scalaire) |



Cadre géométrique
Cadre numérique
Cadre géométrie euclidienne
Cadre repérage (repère cartésien affine)
Cadre repère euclidien
(orthonormé)

# La notion de courbe dans un repère

# Différentes « courbes » (Chauvat, 1997)

$\varphi_R$

**Cadre algébrico-numérique $\mathbb{R}^2$**

le graphe ensembliste $\Gamma_f$, qui est un ensemble de couples de nombres réels , est une partie de $\mathbb{R}^2$.

**Cadre géométrique $\mathcal{P}$**

la courb… …mble de poin…

***Choix d'un repérage***

**Cadre du plan repéré $\mathcal{P}_R$**

$G_R(f) = \mathcal{C}_R = \{\mathbf{M}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ ;

c'est un ensemble de points repérés , c'est-à-dire

***Choix d'un support matériel $\mathcal{R}$***

**Registre graphique**

Une représentation graphique de f

Comment nomme-t-on cet objet ?

Comment nomme-t-on cet objet ?

- On retrouve cette dualité dans l'exercice ci-après »[math'x 2de, édition 2014, p51] :

> *$f(x)=3x^2-2x-5$*
> *a) Tracer une courbe pouvant représenter f.*
> *b) Le point A(1,4 ;2) appartient-il à la courbe ?*

- La locution« une courbe » fait référence au choix du support $\mathcal{R}$ (choix du repère et de sa représentation, unités et fenêtre), la locution « la courbe » fait référence au graphe géométrique en tant qu'objet de $\mathcal{P}_R$ .
- Question du vocabulaire à adopter …

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ | $f(t) = \sqrt{25 - t^2}$ | **Cadre numérique $\mathbb{R}^2$** |
| | ↓ | |
| | $\Gamma_f = \{(\mathrm{t}\,;\mathrm{f(t)}) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{t} \in \mathbb{R}\}$ | |
| | *On choisit un repère $\varphi_R$* | |
| | $G_R\,(f) = \{M(t\,;f(t)) \in \mathcal{P}_R \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un demi-cercle de centre $O(0\,;0)$ passant par $A(5\,;0)$ | **Cadre du plan repéré $\mathcal{P}_\mathbf{R}$** |
| | *On enlève le repère $\varphi_R$* | |
| $\mathcal{P}$ | $\mathcal{C}$ est un demi-cercle de centre $O$ passant par $A$ | **Cadre géométrique $\mathcal{P}$** |

$\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{R}$

# Une conclusion

# Une situation

- Pour la classe ?
- Pour la préparation au concours ?
- Pour la formation des professeurs débutants  ?
- Pour la formation continue ?

# Une situation

- Pour la classe (travailler le repère cartésien, …)
- Pour la préparation au concours ? (réfléchir aux axiomatiques, aux objets manipulés : les nombres, les mondes affine / euclidien, …)
- Pour la formation des professeurs débutants ?

    - analyse a priori et scénarios;

    - notions didactiques (cadre et registres),

    - réfléchir sur les objets (équation cartésienne, courbe)

* Pour la formation continue ?

# La deuxième situation :
# les rectangles d’aire $10cm^2$

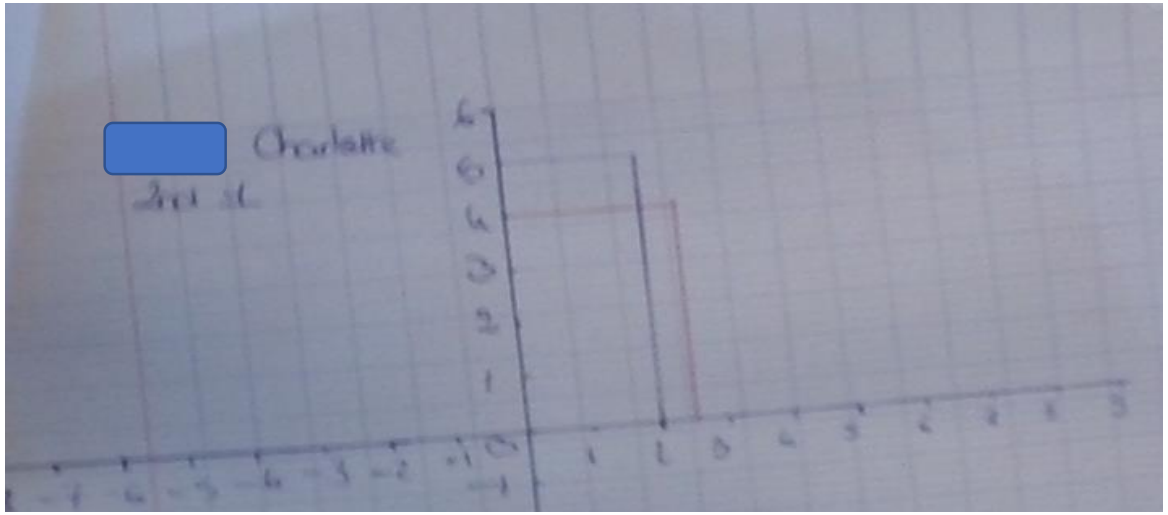
# Les rectangles d’aire 10

- **Énoncé** : *On se donne deux demi-droites d’origine commune O et perpendiculaires entre elles. Construire un rectangle OAMB tels que A appartient à la première demi-droite, B appartient à la seconde demi-droite et l’aire de OAMB est de 10 cm².*
- On ajoutera ensuite la consigne : *Y en a-t-il d’autres ?*
- Et on relancera régulièrement la recherche, de sorte que les élèves aient le plus de rectangles possibles, mais en retardant au maximum le moment où ils tracent la courbe.

- Cette situation croise les cadres de la géométrie, de l’algèbre, du repère cartésien, des fonctions.
- Les nombres y sont vus à la fois comme couple de dimensions du rectangle, comme couple-solution de l’équation xy=10, comme couple de coordonnées du sommet, comme couple image-antécédent de la fonction.
- L’élève doit faire le lien avec l’idée de repère (x et y) et l’idée de fonction (y est fonction de x).

# Obstacles (utiles)

- dépasser les entiers puis les décimaux à 1 décimale ou correspondant à des demis ou quarts
- passer de la multiplication à deux trous (chercher deux nombres a et b tels que a*b=10) à la division (choisir a et calculer b=10/a)
- enrichir la nature des nombres « autorisés » → (re)questionne la droite réelle (bijection *d* et IR, coordonnées comme distance -> constructibilité des nombres)

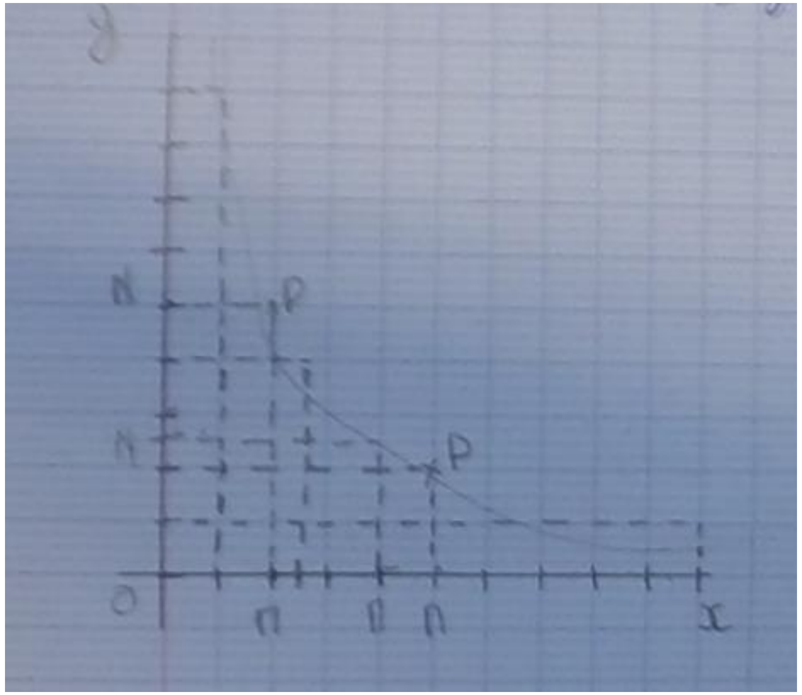


# Obstacles (utiles) - suite

- Difficulté à mobiliser le cadre algébrique / fonctionnel

signification de la ligne qui relie les points -> La ligne comme ensemble de points solution, lala ligne continue

[Vidéo]



# Synthèse possible

- Une courbe est un ensemble de points

  -> importance de retarder le tracé de la courbe (la courbe fait *disparaitre* les points)

- La courbe peut être associée à une certaine fonction qui exprime une relation entre deux variables

# La deuxième situation : les rectangles d’aire 10cm²

- Questionnements du prof de maths
  - Quand on trace , il n’y a plus de points, il y a une ligne
  - Comment passe-t-on des points isolés à la ligne ?
  - aspect historique (comment les points s’alignent pour former la droite)
  - vers une construction axiomatique de la ligne continue

  La ligne continue -> droite réelle -> R
  - En formation ?

# Conclusion

# Des situations

- Pour la classe (travailler le repère cartésien, …)
- Pour la préparation au concours ? (réfléchir aux axiomatiques, aux objets manipulés : les nombres, les mondes affine / euclidien, …)
- Pour la formation des professeurs débutants  ?

  - analyse a priori et scénarios;

  - notions didactiques (cadre et registres),

  - réfléchir sur les objets (équation cartésienne, courbe)

* Pour la formation continue ?