XXV° colloque de la CORFEM, Bordeaux, juin 2018

CONSTRUIRE LES OBJETS ÉLÉMENTAIRES DE LA GÉOMÉTRIE, DE L'ÉCOLE AU LYCÉE : UNE COHÉRENCE POSSIBLE ?

Aurélie Chesnais

LIRDEF, Université de Montpellier

Anne-Cécile Mathé

ACTé – ESPE Clermont, Université Clermont Auvergne

INTRODUCTION

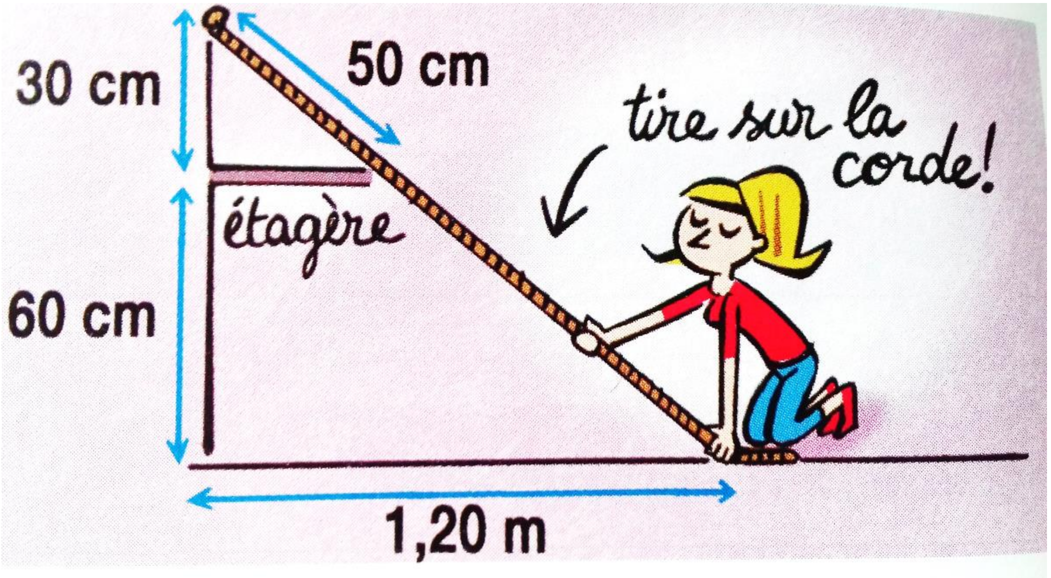
- (Re)penser la / les géométrie(s) et la construction d'une continuité dans l'enseignement, dans la logique des nouveaux programmes pensés en termes de compétences
  - Les objets en jeu et les niveaux de conceptualisation de ces objets
  - La nature de l'activité géométrique
- Quelles références épistémologiques peuvent sous-tendre la réflexion sur l'enseignement de la géométrie à l'école ?

➢ Pistes pour construire un « itinéraire cognitif » de conceptualisation des objets : étapes, ruptures et continuité

3 NIVEAUX DE CONCEPTUALISATION

- Un premier niveau : émergence de premiers objets géométriques, relations, propriétés : dans une visée de travail sur les dessins
- Géométrie des tracés
- Un deuxième niveau : émergence d'objets idéels/théoriques avec une visée de travail sur ces objets *à l'aide* des dessins (changement de statut du dessin)
- Géométrie théorique
- Un troisième niveau : les objets géométriques comme ensembles de points (en lien avec le cadre numérique)
- Lien avec la géométrie analytique

PROBLÉMATIQUE



- Une application du théorème de Thalès ?
- Quels objets géométriques potentiellement sous-jacents ?
  - Un schéma à main levée
  - Une construction aux instruments
  - Une figure géométrique et des théorèmes
    - des valeurs exactes

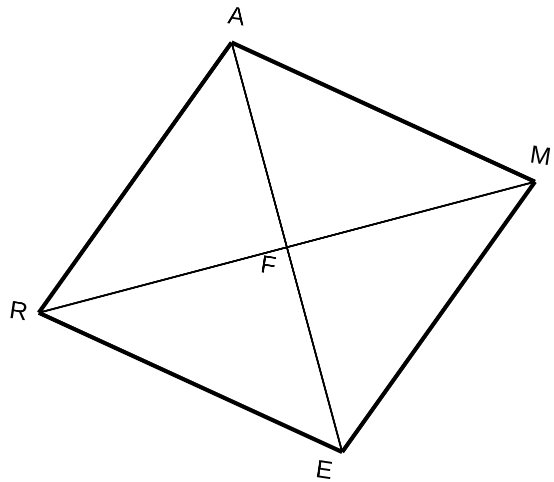
UN PREMIER NIVEAU DE CONCEPTUALISATION DE LA GÉOMÉTRIE

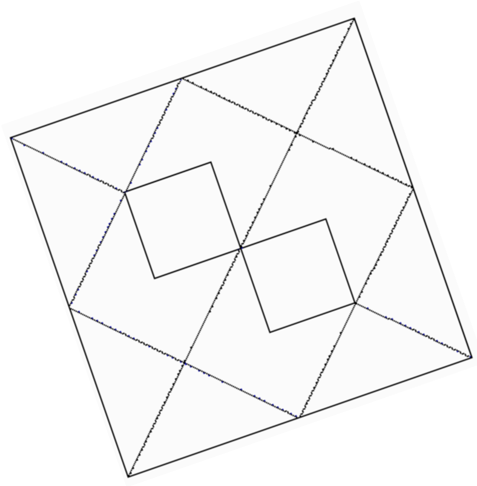
CYCLE 3 - DANS LE PROLONGEMENT DE CELLE DE L'ÉCOLE

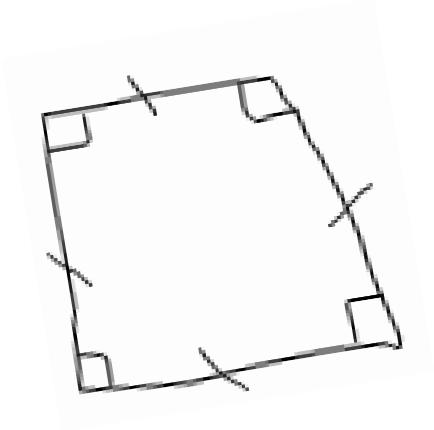
UN PREMIER NIVEAU DE CONCEPTUALISATION DE LA GÉOMÉTRIE
LA GÉOMÉTRIE DU CYCLE 3

- Quel(s) statut(s) du dessin à l'école ? Que peut-on viser au cycle 3 (6°) ?
- Que peuvent être les objets de la géométrie en 6ème ? Quels niveaux de conceptualisation possibles ?
- Quels fondements épistémologiques sous-jacents ?
- Quelles situations susceptibles de faire émerger ces objets géométriques ?
- Quelles pistes de transitions possibles entre la classe de 6ème et le cycle 4 ?

LE STATUT DU DESSIN AU CYCLE 3 : DE FORTS MALENTENDUS



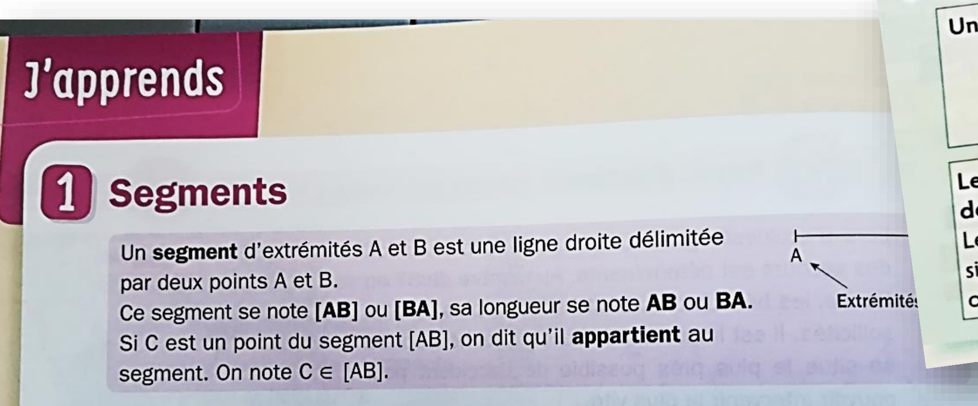




Le dessin :

- schématisation d'objets, de relations et de propriétés géométriques, théoriques, idéaux ?
- objets matériels pris pour lui-même ?
- exemple générique d'une classe d'objets ?

Quelle construction des objets élémentaires de la géométrie ?

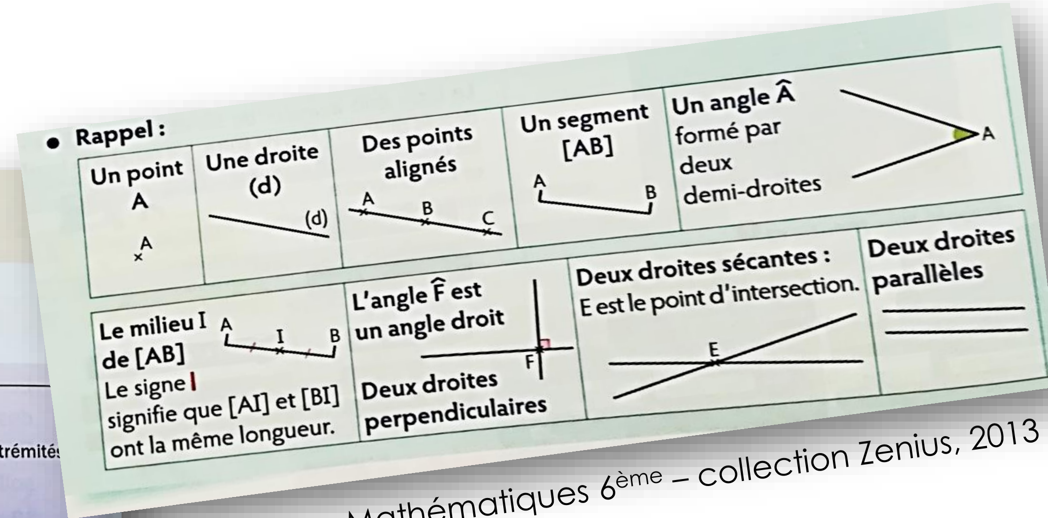


J'apprends

1 Segments

Un **segment** d'extrémités A et B est une ligne droite délimitée par deux points A et B.
Ce segment se note **[AB]** ou **[BA]**, sa longueur se note **AB** ou **BA**.
Si C est un point du segment [AB], on dit qu'il **appartient** au segment. On note C ∈ [AB].

Mathématiques 6ème – collection Dimensions_Hatier_2016



• Rappel :

Un point A	Une droite (d)	Des points alignés	Un segment [AB]	Un angle $\hat{A}$ formé par deux demi-droites
Le milieu I de [AB] Le signe signifie que [AI] et [BI] ont la même longueur.	L'angle $\hat{F}$ est un angle droit Deux droites perpendiculaires	Deux droites sécantes : E est le point d'intersection.		Deux droites parallèles

Mathématiques 6ème – collection Zenius, 2013

Des objets géométriques supposés déjà là, qu'il suffirait de savoir de désigner (nom, notation) pour comprendre et connaître ?

Quelles peuvent être les conceptions de la droite, du point pour des élèves de 6ème ? Que pourrait-on viser ?

La géométrie du cycle 3 : une géométrie des tracés
(Perrin-Glorian, 2018, HAL)

- **Une géométrie visant un travail sur des dessins (objets de l'espace sensible)**

Permet la représentation de l'espace, des objets de l'espace et des actions sur les objets de l'espace.

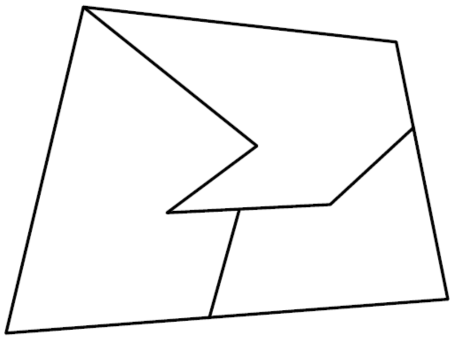
Comprend un corpus de savoirs validés par les expériences de tracés à l'aide d'instruments dans l'espace sensible.

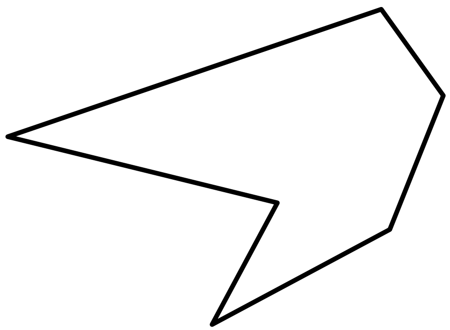
- **Géométrie des tracés /G1** (*Houdement et Kuzniak, 2000*) **: le rôle central des instruments**
  - Distinction entre perception visuelle et manipulation d'instruments
  - Instruments reliés à des concepts géométriques

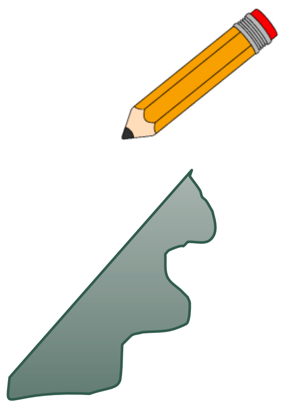
Au cycle 3 (dans le prolongement de l'école)
Concepts géométriques abordés à partir de l'usage des instruments dans des problèmes de reproduction ou de construction.

QUELS NIVEAUX DE CONCEPTUALISATION POSSIBLES DES OBJETS DE LA GÉOMÉTRIE ? QUELS ENJEUX DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ?

- **Un exemple de situation de reproduction de dessins**

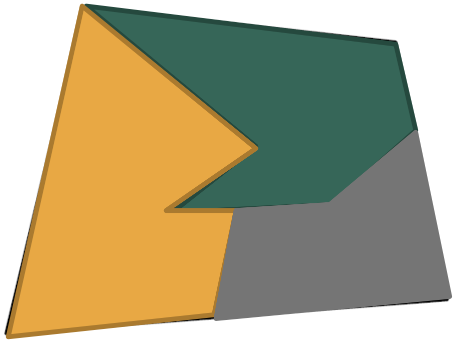


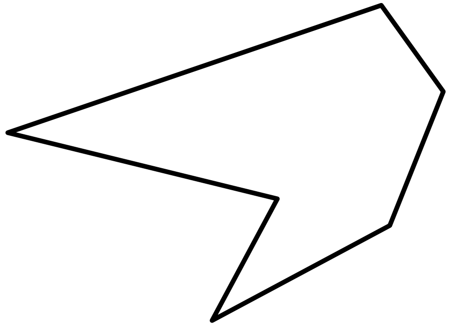


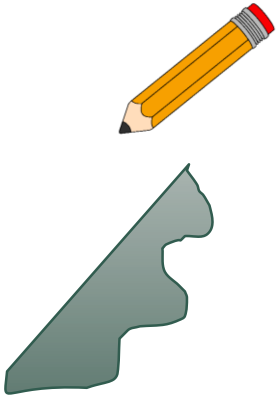


QUELS NIVEAUX DE CONCEPTUALISATION POSSIBLES DES OBJETS DE LA GÉOMÉTRIE ? QUELS ENJEUX DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ?

- **Un exemple de situation de reproduction de dessins**

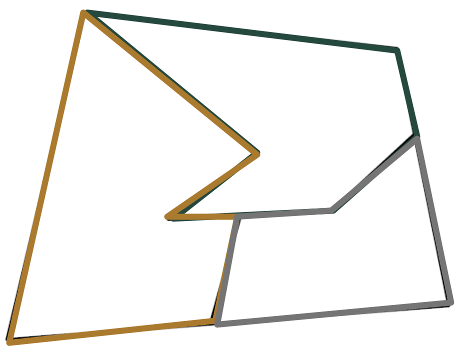


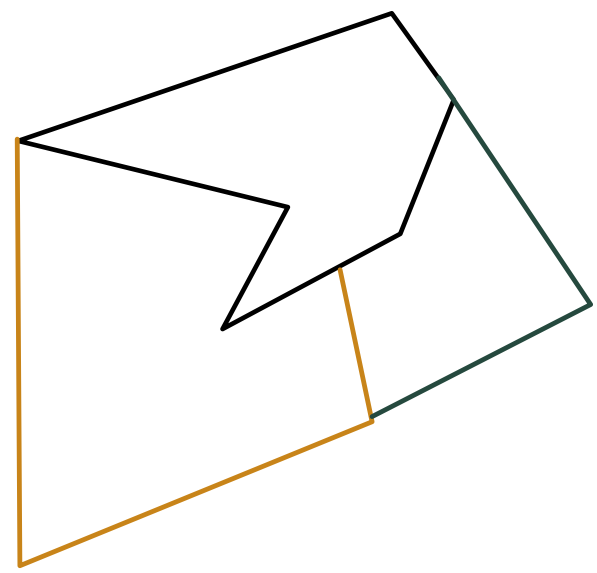


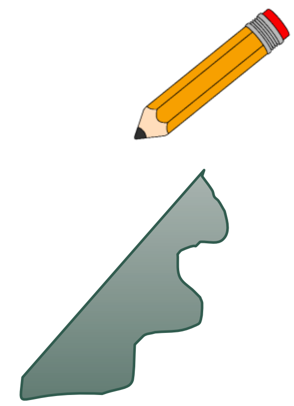


QUELS NIVEAUX DE CONCEPTUALISATION POSSIBLES DES OBJETS DE LA GÉOMÉTRIE ? QUELS ENJEUX DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ?

- **Un exemple de situation de reproduction de dessins**

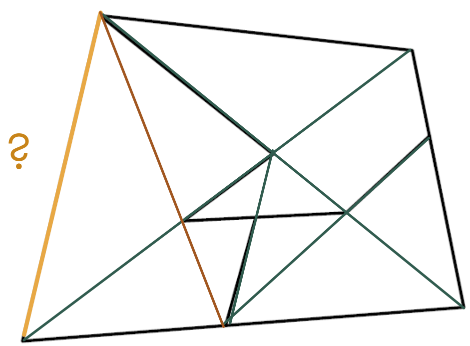


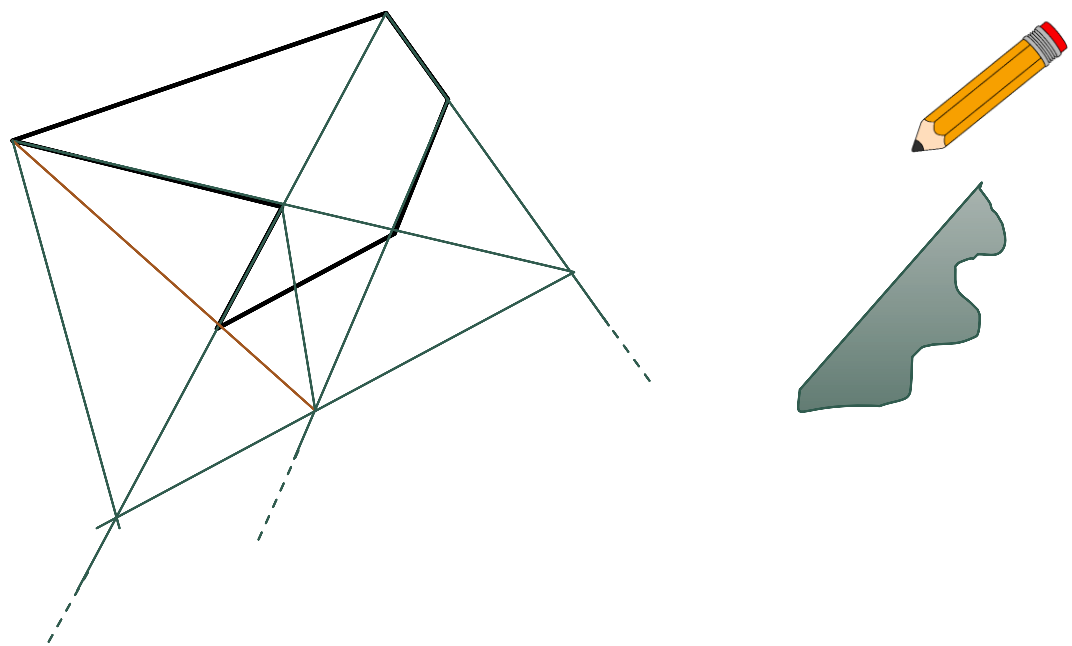




QUELS NIVEAUX DE CONCEPTUALISATION POSSIBLES DES OBJETS DE LA GÉOMÉTRIE ? QUELS ENJEUX DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ?

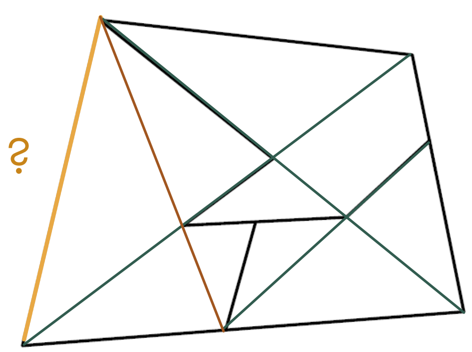
- **Un exemple de situation de reproduction de dessins**

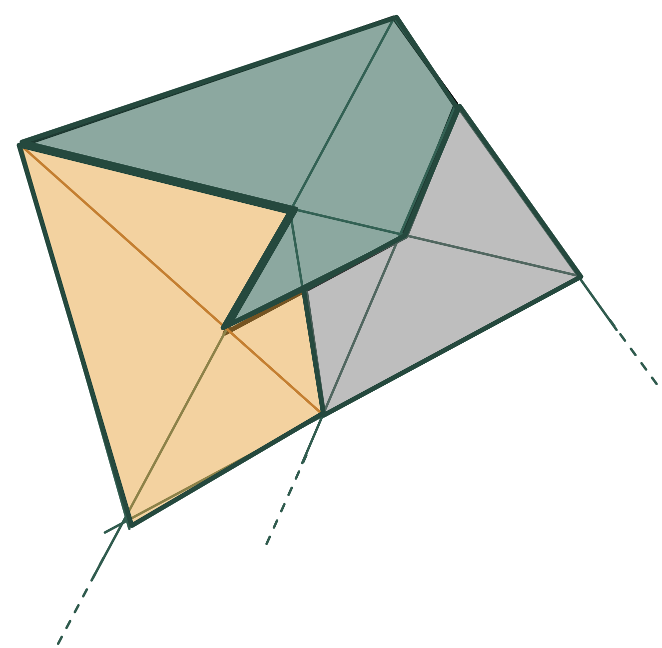


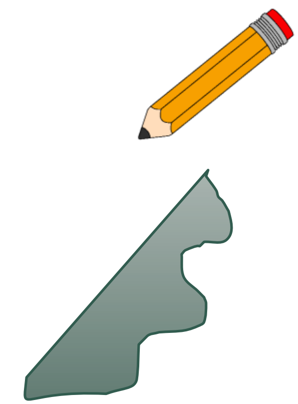


QUELS NIVEAUX DE CONCEPTUALISATION POSSIBLES DES OBJETS DE LA GÉOMÉTRIE ? QUELS ENJEUX DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ?

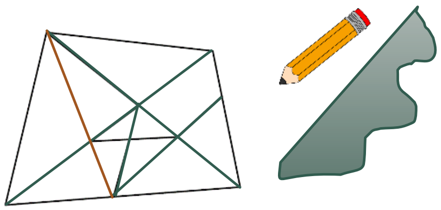
- **Un exemple de situation de reproduction de dessins**





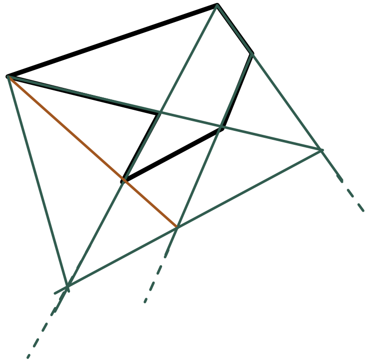


QUELS ENJEUX DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE AU CYCLE 3 ?



- **Amener les élèves à construire un rapport géométrique aux dessins**

ie analyser, traiter, décrire ces dessins pour pourvoir les reproduire, les construire - *avec des instruments*



- Jouer sur des visions en termes de surfaces, de lignes, de points

- Prolonger des bords de formes en 'traits que l'on peut prolonger autant que l'on veut'.

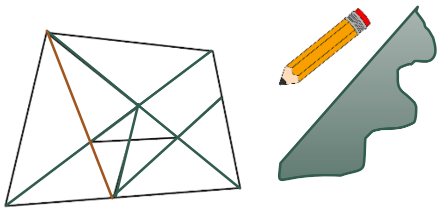
- Percevoir et reproduire, à l'aide d'instruments, des relations entre des traits (bords de formes) et des sommets ou entre sommets

- Construire un sommet comme point intersection de lignes

- Reproduire des traits à partir d'un autre trait ou de deux points

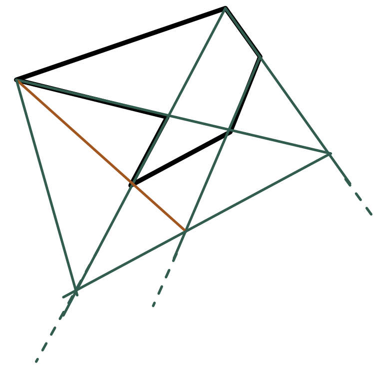
QUELS ENJEUX DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE AU CYCLE 3 ?

Quel(s) statut(s) des dessin(s) ?



- L'activité géométrique : une expérimentation directe sur le dessin

Un usage réglé des instruments validé par l'expérience sur le dessin



- Mais un statut du dessin qui doit évoluer :

➢ Objets matériels - Expérimentation directe

➢ Représentations matérielles d'autres objets matériels, visés par la géométrie. Travail expérimental sur une classe d'objets (*exemple générique*)

A l'école, au cycle 3, en $6^{ème}$, les objets de la géométrie se construisent comme classes de dessins (objets matériels)

QUELS ENJEUX DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE AU CYCLE 3 ?

D'un usage réglé des instruments à de premiers niveaux de conceptualisation des objets géométriques

Que peuvent-être une droite, un point, un segment en géométrie des tracés ?

- Un **segment** est un trait rectiligne (fini)
- Une **droite** est un trait rectiligne que l'on peut toujours prolonger

  Une classe de traits de même direction et de différentes longueurs
- **Point** : intersection de lignes

- Relations

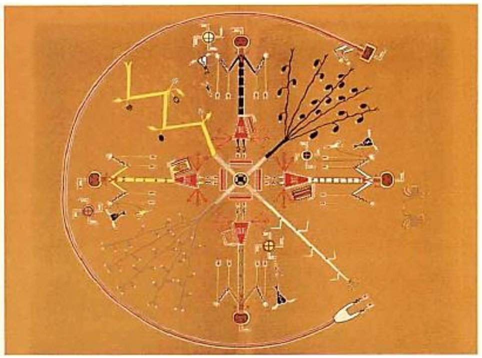
On peut prolonger un segment en une droite.

Il existe des points sur une droite (une ligne)

Une droite est caractérisée par un segment ou deux points

GÉOMÉTRIE DES TRACÉS : UN FONDEMENT ÉPISTÉMOLOGIQUE DANS LES GÉOMÉTRIES PRÉ-EUCLIDIENNES ?

Olivier Keller (1998, 2000, 2004)

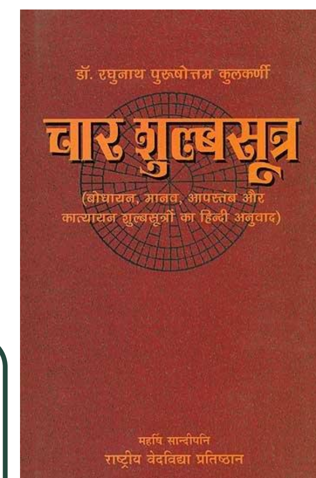


Peinture navajo (Keller, 2014)

- **Géométries rituelles**
  - Visée : construction d'objets schématisant des objets de l'espace sensible
  - Signes permettant l'interpénétration de deux mondes (celui qui est là / celui du sens, du pouvoir, des puissances et des ancêtres)

→ des problèmes et techniques de construction

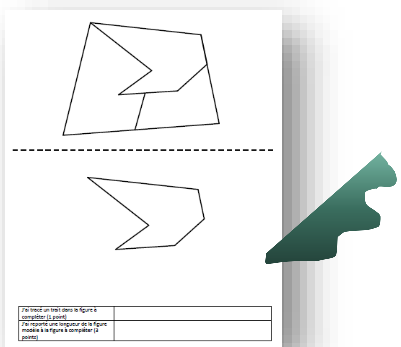
- **La géométrie de l'Inde védique et les Sulbasutras**
  - Textes recensant des savoirs et savoir-faire des « tendeurs de cordes »
  - Des similitudes frappantes avec certains problèmes les Eléments d'Euclide mais ici instruments = corde et piquets (droites et cercles chez Euclide).

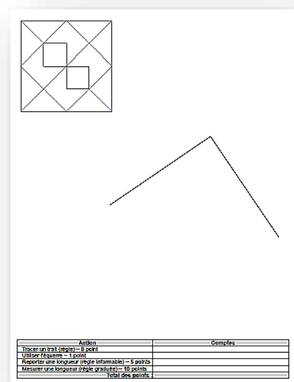


Des objets de la géométrie non isolés de leur contexte pratique, non nommés, non articulés directement entre eux dans un système théorique.

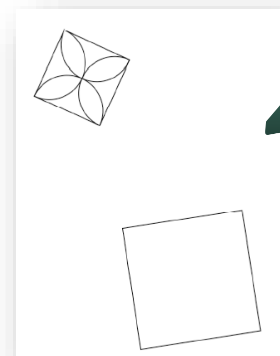
Retour en classes – enjeux de formation école/collège
COMMENT PERMETTRE AUX ÉLÈVES UNE CONSTRUCTION DE CES PREMIERS OBJETS RELATIONS, PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES ?

- Les situations de reproduction avec contraintes sur les instruments comme situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessins





Barrier T., Hache C., Mathé AC (2014)



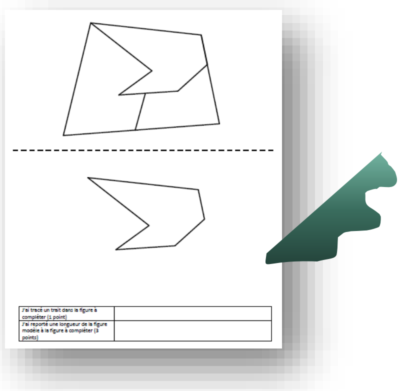
Bulf C., Celi V. (2016)

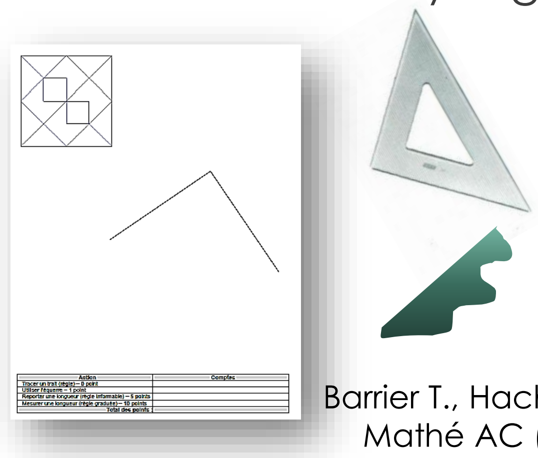
Extrait des programmes 2015, espace et géométrie, cycle 3

Les situations faisant appel à différents types de tâches (reconnaitre, nommer, comparer, vérifier, décrire, reproduire, représenter, construire) portant sur des objets géométriques, sont privilégiées afin de faire émerger des concepts géométriques (caractérisations et propriétés des objets, relations entre les objets) et de les enrichir. Un jeu sur les contraintes de la situation, sur les supports et les instruments mis à disposition des élèves, permet une évolution des procédures de traitement des problèmes et un enrichissement des connaissances

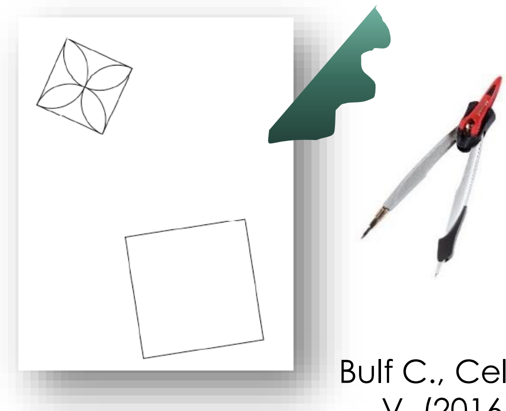
Retour en classes – enjeux de formation école/collège
COMMENT PERMETTRE AUX ÉLÈVES UNE CONSTRUCTION DE CES PREMIERS OBJETS RELATIONS, PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES ?

- Les situations de reproduction avec contraintes sur les instruments comme situation fondamentale de l'analyse géométrique de dessins





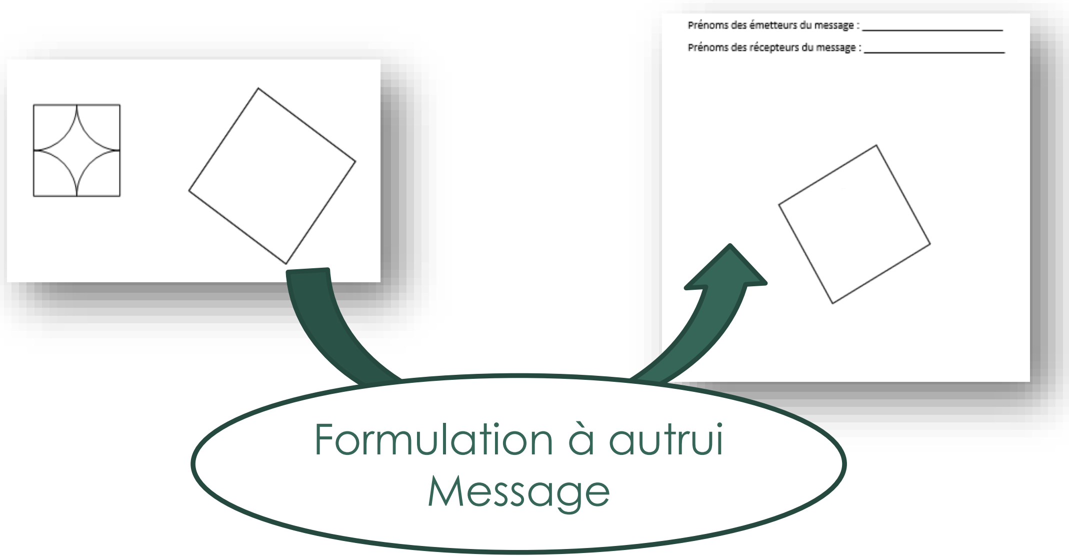
Barrier T., Hache C., Mathé AC (2014)



Bulf C., Celi V. (2016)

- Des connaissances pour l'action à l'émergence de savoirs géométriques : le travail autour de la verbalisation des procédures de reproduction (*secondarisation*)
- Les situations de formulation et de validation : vers un premier niveau de conceptualisation de la figure

Situations de formulation et de validation
Premier pas d'un travail sur le dessin à un travail sur la figure

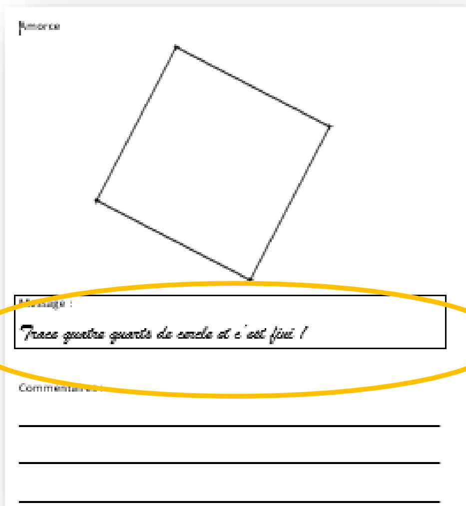


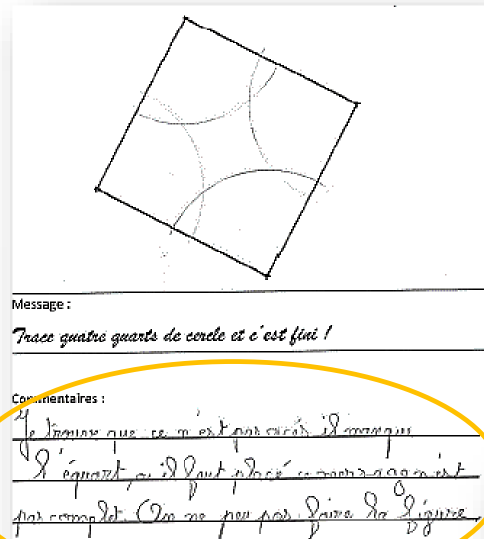
Enjeux : construction d'un langage géométrique portant l'analyse géométrique de dessins

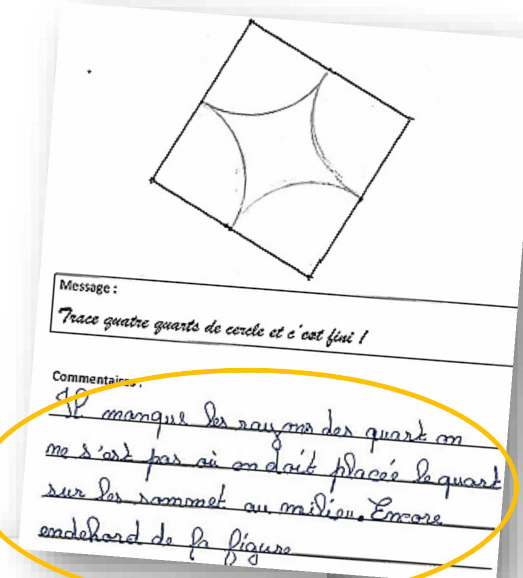
- Langage verbal oral ou écrit
- D'un langage technique à un langage géométrie (Petitfour, 2017)

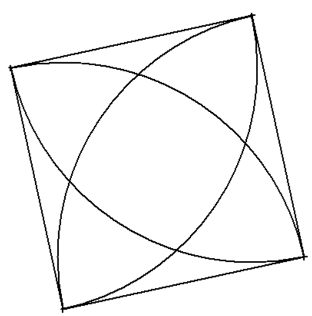
Situations de formulation et de validation
Premier pas d'un travail sur le dessin à un travail sur la figure

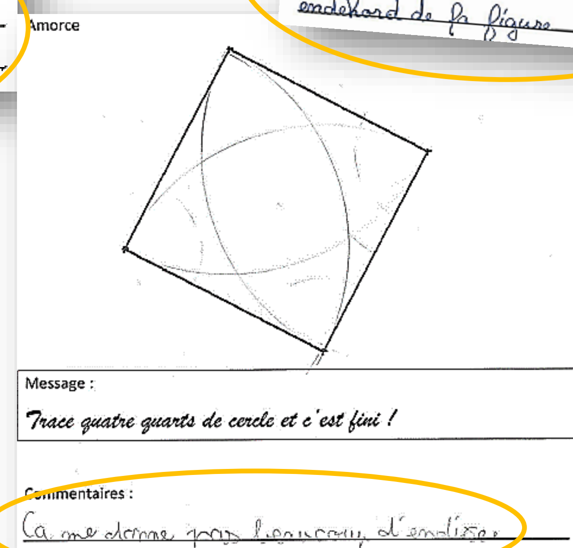
Situations de formulation et de validation
Premier pas d'un travail sur le dessin à un travail sur la figure











Situations de formulation et de validation
Premier pas d'un travail sur le dessin à un travail sur la figure

- D'une **description pragmatique d'un dessin** à une analyse qui permette de le **caractériser (définir) géométriquement (*figure*)**

- De **questions de construction** (comment obtenir un tracé graphique ?) à des **questions de constructibilité**, portant sur les objets géométriques

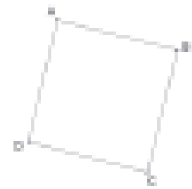
- **Renversement de la fonction du dessin par rapport à la figure**, portée un langage de *représentation principale* (autosuffisante) à *représentation auxiliaire* (Duval, 2005, p.34)
  - *Dessin considéré comme représentation principale, autosuffisante de la figure* : l'analyse langagière remplit une fonction de description (d'un état, d'une représentation, d'une relation)
  - *Analyse langagière considérée comme représentation principale, autosuffisante de la figure* : le dessin à une fonction d'illustration comme exemple ou contre-exemple.

L'ENTRÉE DANS UNE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE

L'ÉMERGENCE DES OBJETS IDÉAUX : UN ENJEU DU COLLÈGE EN LIEN AVEC L'ENTRÉE DANS LA DÉMONSTRATION

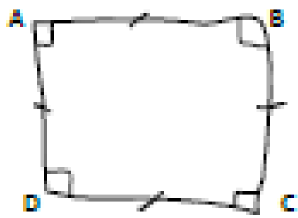
QCM : Dans chacun des cas, dire s'il s'agit d'un carré. Pour les questions 2 à 5, la question porte sur ABCD.

1. Objet montré ☐ Vrai ☐ Faux ☐ NSPP

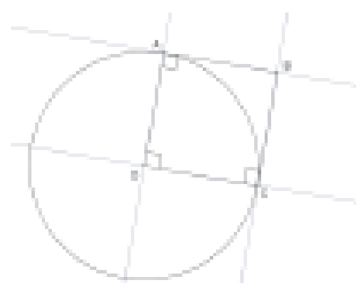


2. ☐ Vrai ☐ Faux ☐ NSPP

3. ☐ Vrai ☐ Faux ☐ NSPP

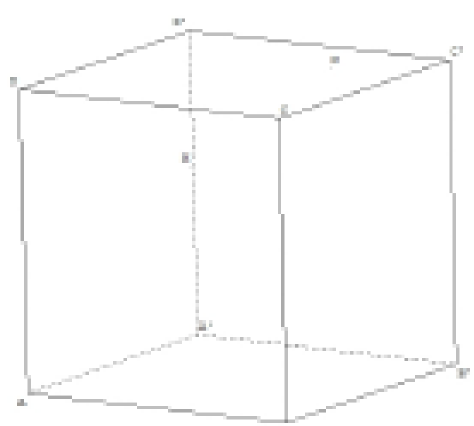


4. ☐ Vrai ☐ Faux ☐ NSPP



5. ABCDA'B'C'D' est un cube.

☐ Vrai ☐ Faux ☐ NSPP

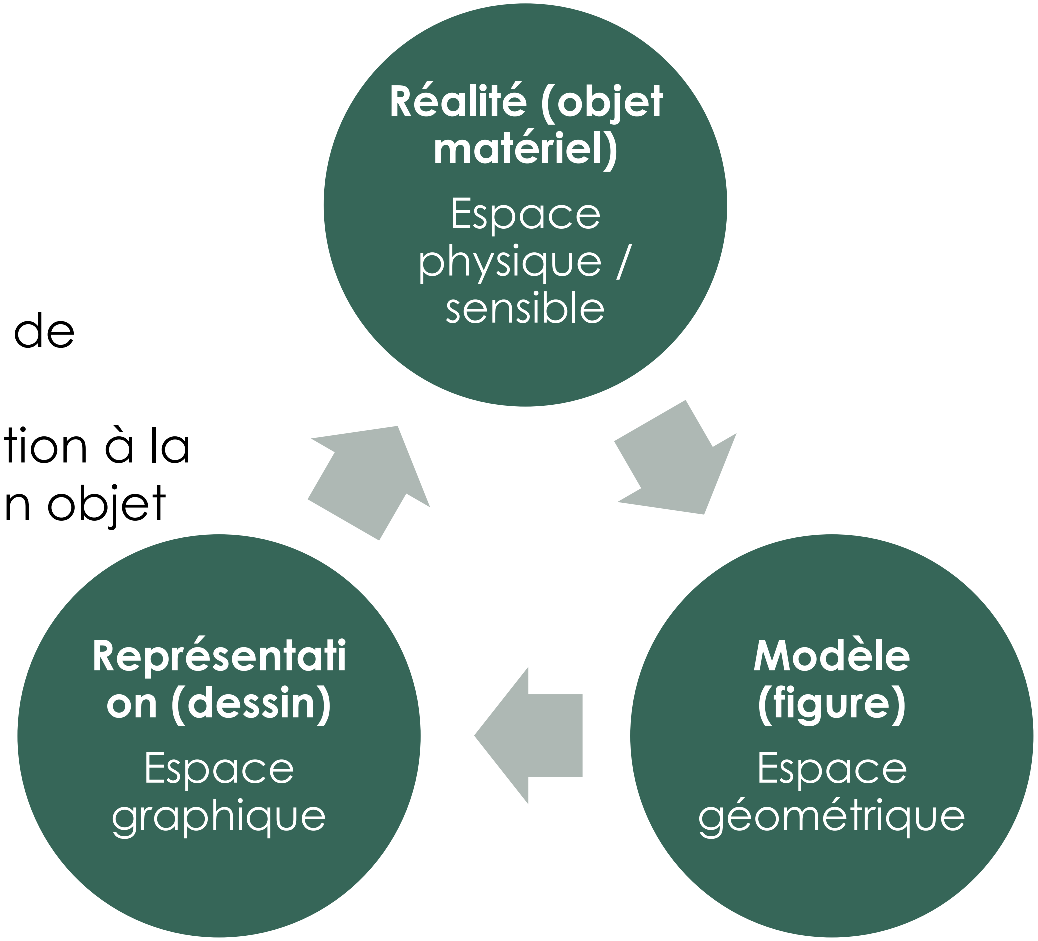


QUESTION 1 : L'ÉVOLUTION DES OBJETS TOUT AU LONG DE LA SCOLARITÉ

- Question 1
  - On ne dit pas en maternelle « mets le parallélépipède rectangle dans le trou »
  - L'enrichissement des objets tout au long de la scolarité + la question du langage
- Questions 2 à 5 : FAUX
  - Les objets de la géométrie théorique n'ont pas d'existence matérielle : objets idéaux / idéels
  - Les « dessins » aux instruments ou à main levée ne sont que des représentations des objets théoriques

QUESTION 1 : L’ÉVOLUTION DES OBJETS TOUT AU LONG DE LA SCOLARITÉ

- Dessin / figure
- La géométrie comme modèle de l’espace sensible
- Les dessins comme représentation à la fois d’un objet physique et d’un objet théorique

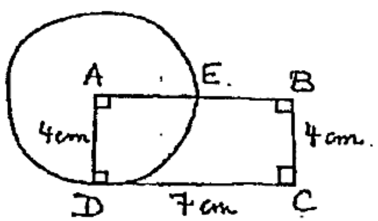


QUESTIONS 2 ET 3

- La validation, l'entrée dans la démonstration : une rupture
- La question des objets théoriques
  - L'évolution de l'école au collège
  - La nécessité de clarifier le « contrat »
- La mesure : mesure théorique / mesure empirique, idée de précision (Chesnais et Munier, 2016) -> incommensurabilité ?
- Dessin à main levée / dessin aux instruments
- ➢ En lien avec les différentes fonctions de la géométrie
  - « finalité pratique pour la géométrie comme outil de modélisation de l'espace,
  - finalité théorique pour la géométrie comme théorie mathématique. » (Perrin-Glorian et Godin)
- ➢ Différentes origines (Houdement, 2007)
- ➢ Différents niveaux de conceptualisation des objets de la géométrie
- Questions 4 et 5

LE DESSIN À MAIN LEVÉE

Sur ce dessin à main levée (les vraies grandeurs sont écrites en cm), on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D.
Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.



Trouve la longueur du segment [EB] :

………………………………………………

Explique ta réponse :

………………………………………………

(évaluation entrée en 6e)

Le résoudre puis analyser les productions des élèves suivants :

- Victor : 3,5 cm

Explication : *le cercle passe au milieu du segment.*

- Adrien : 1,5 cm.

Explication : *j'ai mesuré.*

- Jeanne : 3,2 cm

Explication : *j'ai refait la figure avec les instruments et j'ai mesuré*

- Lise : 3 cm

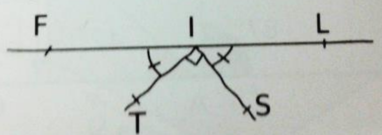
Explication : *7cm – 4cm = 3cm.*

- **Notion de paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak)**
- **Une problématique d'enseignement : ruptures et continuité**
- **La question de la mesure**

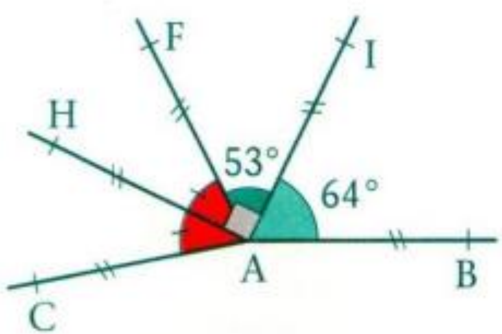
DANS LES MANUELS

12 *Alignés ?*

Dans la figure ci-dessous faite à main levée, on donne : $\widehat{LIS} = 44°$.
Les points F, I et L sont-ils alignés ? Justifie.



58 1) Reproduire la figure.
) Les points B, A, C sont-ils alignés ? Justifier la :ponse.



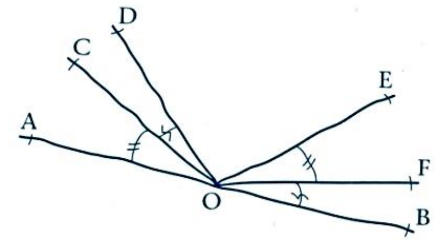
- Dessins faux et dessins à main levée (Coppé, Dorier et Moreau)

JE RÉDIGE LA SOLUTION D'UN EXERCICE

Énoncé de l'exercice

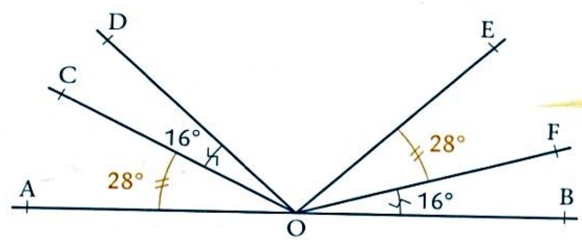
1) Refaire en vraie grandeur la figure sachant que :
$OA = OB = OC = OD = OE = OF = 4$ cm
$\widehat{AOB} = 180°$
$\widehat{AOC} = 28°$
$\widehat{BOF} = 16°$

2) L'angle $\widehat{DOE}$ est-il droit ? Justifier la réponse.



Rédaction de la solution

1) *Construction :*



2) *On sait que :*
- $\widehat{AOC} = \widehat{EOF} = 28°$
- $\widehat{COD} = \widehat{BOF} = 16°$
- $\widehat{AOB} = 180°$

$\widehat{AOC} + \widehat{COD} + \widehat{EOF} + \widehat{FOB} = 28° + 16° + 28° + 16° = 88°$
Donc : $\widehat{DOE} + 88° = 180°$
D'où : $\widehat{DOE} = 180° - 88° = 92°$
Ainsi : $\widehat{DOE} = 92°$

L'angle DOE *n'est donc pas droit.*

Mes conseils

$\widehat{AOB}$ est un angle plat : une règle suffit pour le tracer. Comme les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{EOF}$ sont codés de la même façon, ils ont la même mesure. Tu dois utiliser un rapporteur pour construire la figure.

*J'ai vérifié avec mon équerre : il semble que l'angle $\widehat{DOE}$ soit droit. Pour **justifier**, il faut **calculer** la valeur de cet angle.*

*Je pensais que cet angle était droit, mais **le calcul prouve** que je me trompais.*

LA NATURE DU TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE / DES OBJETS

2) a Tracer un triangle STR isocèle en T tel que :
ST = 5 cm et $\widehat{STR} = 56°$.

b Mesurer les angles $\widehat{TSR}$ et $\widehat{TRS}$.

c Quelle conjecture faire concernant les mesures de ces angles ?

- Quel sens cela a-t-il ?
- Reformuler les questions

b. Donne la mesure empirique de ces angles

c. Que peut-on dire des mesures théoriques des angles du triangle ?

- La question de la généralisation
  - « le » triangle isocèle
- Les « deux niveaux de conjecture »

DANS LES MANUELS - CONCLUSION

- On fait « comme si »
  - les notions de figure théorique et de mesure théorique étaient construites ou transparentes
  - les règles du jeu géométrique étaient transparentes
  - les mesures empiriques étaient des mesures exactes et qu'il y avait coïncidence entre les deux…
  - … sauf lorsqu'on ne peut pas faire autrement (formules de la longueur du cercle) ou que cela sert de support pour enseigner autre chose (statistiques)

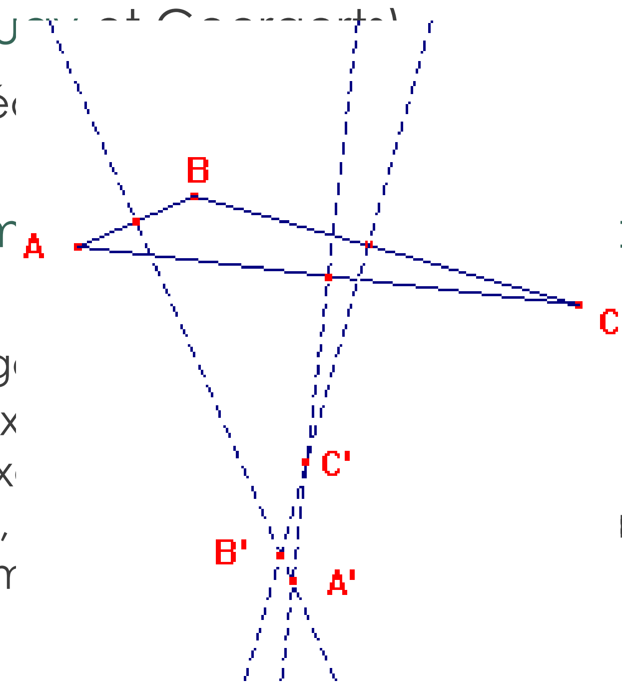
- Le « changement de contrat » reste très largement implicite, à l'insu des enseignants (naturalisation)

LA MOTIVATION DE LA GÉOMÉTRIE THÉORIQUE

- En lien avec la finalité de construction d'une théorie axiomatique
  - L'intersection des médiatrices (Brousseau)
  - La géométrie ne consiste pas à décrire ce qu'on voit mais à établir ce qui "doit" être vu.
  - ➢ Si quoi ?
- « le paradigme du physicien géomètre » (Tanguay et Geeraerts)
  - Associer les élèves à l'élaboration de l'édifice théorique, avec un statut donnée à la vérification empirique
- En lien avec la finalité de résolution de problèmes issus de l'espace sensible, la « modélisation »
  - Motiver la géométrie théorique par le coût de la géométrie instrumentée ?
  - Géométrie théorique pour faire l'économie de l'expérience : dans un sens très large, mais pas forcément vrai localement : par exemple, entre un dessin à l'échelle et mesure VS un raisonnement théorique, la nécessité du premier est rare (Houdement), d'autant plus avec les TICE qui permettent d'être précis
  - Le besoin de généraliser
  - La nécessité d'une certaine précision
  - Contrôle de l'action dans la réalité : dimension expérimentale (Dias)

LA MOTIVATION DE LA GÉOMÉTRIE THÉORIQUE

- En lien avec la finalité de construction d’une théorie axiomatique
  - L’intersection des médiatrices (Brousseau)
  - La géométrie ne consiste pas à décrire ce qu'on voit mais à établir ce qui "doit" être vu.
  - ➢ Si quoi ?
- « le paradigme du physicien géomètre » (Tangu
  - Associer les élèves à l’élaboration de l’édifice thé e à la vérification empirique
- En lien avec la finalité de résolution de problèm ble, la « modélisation »
  - Motiver la géométrie théorique par le coût de la g
  - Géométrie théorique pour faire l’économie de l’ex large, mais pas forcément vrai localement : par ex l’échelle et mesure VS un raisonnement théorique, ire (Houdement), d’autant plus avec les TICE qui perm
  - Le besoin de généraliser
  - La nécessité d’une certaine précision
  - Contrôle de l’action dans la réalité : dimension expérimentale (Dias)



LES LIMITES DE LA MESURE EMPIRIQUE : UN LEVIER ?

- En assumant la dispersion des mesures empiriques
  - Débat autour des constructions aux instruments (surtout sur les angles)
  - Déjà un peu assumé dans les classes pour les angles mais dépendant de la mise en œuvre
  - Conjecturer une propriété à partir de mesures empiriques : vu comme modélisation (au sens des sciences expérimentales)
- En assumant le caractère décimal avec une seule décimale
  - Dans le problème de l'inégalité triangulaire
- Mais ce n'est pas simple…

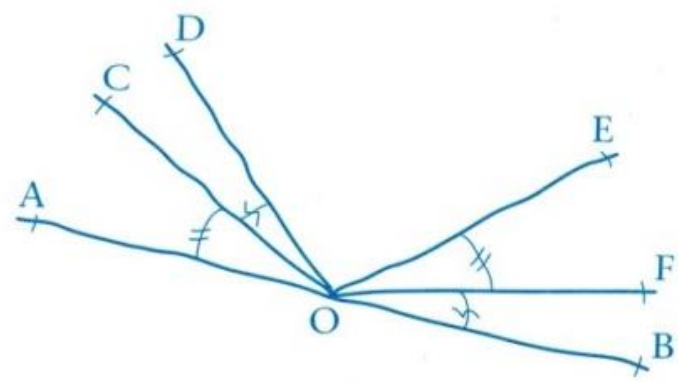
LES LIMITES DE LA MESURE EMPIRIQUE : UN LEVIER ?

- En assumant la dispersion des mesures empiriques
  - Débat autour des constructions aux instruments (surtout sur les angles)
  - Déjà un peu assumé dans les classes pour les angles mais

Énoncé de l'exercice

1) Refaire en vraie grandeur la figure sachant que :
$OA = OB = OC = OD = OE = OF = 4$ cm
$\widehat{AOB} = 180°$
$\widehat{AOC} = 28°$
$\widehat{BOF} = 16°$

2) L'angle $\widehat{DOE}$ est-il droit ? Justifier la réponse.



UNE DIFFICULTÉ POUR LES ENSEIGNANTS – UN ENJEU DE FORMATION … ET DE RECHERCHE !

- Une vraie difficulté à l'enseigner
  - les solutions « classiques » apportées par les enseignants aux difficultés posées dans les classes par l'écart entre mesurage effectif et mesure théorique mènent à des « impasses problématiques »
  - il évoque ainsi le « « divorce » entre les concepts mathématiques enseignés et les activités effectives des élèves » (p. 19)
- Une difficile prise en charge dans les manuels (cf. Chesnais et Munier, 2016)
- Peu d'éléments dans les programmes et documents d'accompagnement
  - Nouveaux documents d'accompagnement :
    - Une autre méthode non experte peut être basée sur la construction de la figure avec un logiciel de géométrie […] Ces deux méthodes ont toute leur validité, car elles donnent un résultat satisfaisant dans la mesure où il s'agit d'un problème de la vie courante Avec les données, la valeur intermédiaire attendue de AC est une approximation décimale, par exemple AC ≈ 99,7. (La valeur exacte AC = $\sqrt{9945}$ n'est pas un attendu raisonnable dans le contexte).

EN TANT QU'ENJEU DE FORMATION

- Mais former la vigilance (malentendus), l'importance de ne pas sous-estimer l'enjeu et l'importance des mises en œuvre (discours)

« rendre conscients professeurs et élèves de l'éclatement de la Géométrie élémentaire en plusieurs paradigmes, qu'il faudrait explicitement nommer » […] Ceci permettrait d'abord de valoriser des pratiques très commodes dans la vie ordinaire (dessin à l'échelle et calculs), ensuite de leur donner un statut à l'intérieur de la Géométrie I, enfin de différencier le contrat de la Géométrie II et donner un place à cette phrase très formelle (hors du réel) : *une constatation ou des mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé est vrai* en Géométrie II. *» (*Houdement, 2007*)*

- Clarifications épistémologiques voire de contenus (incertitudes de mesure, constructibilité) et « dénaturatlisation » - Y compris sur le langage (« LE » triangle équilatéral)
- L'identification de la problématique d'apprentissage
- L'identification de la problématique d'enseignement : identifier les tâches non cohérentes, les conditions de mise en œuvre qui peuvent rendre certaines tâches porteuses d'apprentissages
- Des pistes sur la motivation de la géométrie théoriques et le rapport avec la « modélisation »
- La question des TICE

LE NIVEAU DE CONCEPTUALISATION VISÉ POUR LA DROITE

- Un exercice de sixième (tiré de la brochure de l'IREM de Lyon « La géométrie plane du cycle 3 au collège », Anselmo et Zucchetta)

Paul a placé des points à 4 cm du point P. Il affirme que ces points sont sur une même droite.

Es-tu d'accord avec Paul ? ....

Explique ta réponse : ....

LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

LA QUESTION DES FIGURES COMME ENSEMBLES DE POINTS

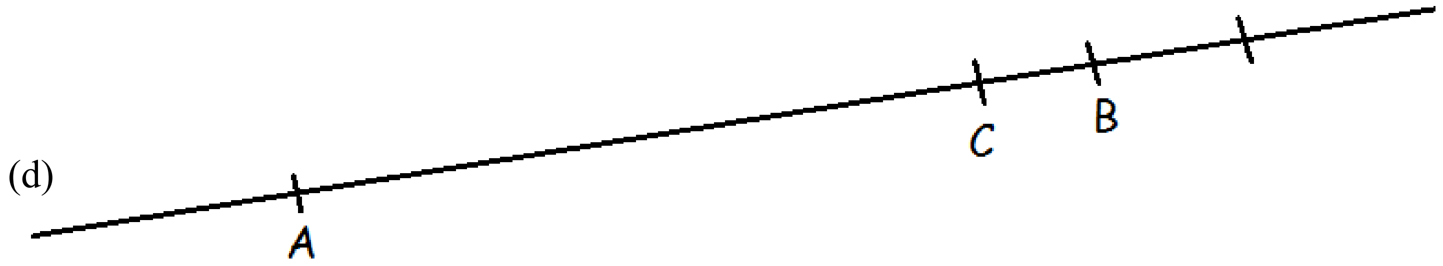
- La droite d'Euclide VS la droite comme ensemble de points ?
- Commence à se construire au cycle 3
  - Les points comme sommets de polygones, intersections de ligne, extrémités de segments, milieu d'un segment, mais peu de points libres (centre du cercle)
  - avec progressivement la possibilité de placer un point n'importe où sur la droite, autant qu'on veut, toujours en placer un entre 2 etc.
  - La ligne comme « lieu de points »
    - Le cercle
    - La médiatrice
- La géométrie analytique pour achever le processus

➢ Travail du groupe IREM didactique de Montpellier (Cerclé et al., 2015, actes CORFEM)

A PARTIR DES ÉQUATIONS DE DROITES

- « équation de droite »
- La droite (d'équation donnée) est **l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation**
- emblématique de la géométrie repérée et lien entre différents cadres (fonctionnel, numérique, algébrique, géométrique)
- le repère cartésien comme objet mathématique
  - Relations entre les objets
  - La droite (réelle) comme ensemble (continu) de points

6 - Combien de points la droite (d) ci-dessous contient-elle ?



☐ Aucun ☐ Trois ☐ Quatre ☐ Plus de quatre ☐ Je ne sais pas

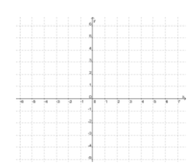
- De 13 % à 42 % des élèves selon les classes de seconde pensent qu'il y a plus de 4 points
- Proportion importante des élèves pour qui seuls les points nommés sont considérés (jusqu'à 60 %)
- En troisième, très majoritairement 4 points

QUESTION 11 ET 12 (4 CLASSES, 113 ÉLÈVES)

11 - Mets en rouge les points de la figure ci-dessous qui ont une ordonnée supérieure à 3.

12 - Mets en rouge les points qui ont leur abscisse égale à leur ordonnée.

- **Sur les deux tâches, environ la moitié des élèves ne considère que les points qui correspondent à des intersections (pointillés)**



DES SITUATIONS AU LYCÉE

- L'équation 3x-2y = 5
- Les rectangles d'aire 10
- La courbe représentative de la fonction $f : t \to \sqrt{25 - t^2}$ ou l'équation du demi-cercle (atelier Cerclé et Nyssen)

L'ÉQUATION 3X-2Y = 5

- Première étape : revisiter la notion d'équation
- Deuxième étape : des couples de nombres comme solutions
- Troisième étape : un processus pour décrire toutes les solutions
  - Algébrique / graphique
- Quatrième étape : le lien avec la fonction affine
- Une synthèse sur l'enrichissement de la notion de droite (3 points de vue) :
  - la droite comme ensemble de points alignés (point de vue géométrique)
  - la droite comme courbe représentative d'une fonction affine (point de vue fonction)
  - la droite comme représentant l'ensemble de solutions d'une équation (point de vue algébrique)
    - Les points dont les coordonnées vérifient l'équation

LES RECTANGLES D'AIRE 10

- Dans un repère cartésien d'origine O, trouver tous les rectangles OAMB tels que A appartient à l'axe des abscisses, B appartient à l'axe des ordonnées et l'aire de OAMB est de 10 cm².
- Une situation très complexe : articule des aspects numériques, géométriques, algébriques et analytiques
- Révèle
  - La difficulté des élèves à mobiliser des connaissances géométriques pertinentes
  - La non-construction de la droite réelle : -> Sherazade, nombre de décimales, Lucas

-> **Hypothèse** : pour les élèves, les nombres que l'on place sur la droite sont des mesures, donc forcément décimaux, en référence à la mesure empirique (Chesnais et Munier 2016)

Synthèse :

- Une courbe est un ensemble de points
- La courbe peut être associée à une certaine fonction qui exprime une relation entre deux variables

CONCLUSION SUR L'ENTRÉE DANS LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

- Pour la majorité des élèves, encore en seconde, un point « n'existe » que s'il est marqué, voire seulement s'il est nommé, sur une droite / dans le plan
- Le rapport entre droite (ligne) et points n'est pas tout à fait construit

-> insuffisant pour comprendre la notion d'équation de droite et rentrer dans la géométrie repérée

-> nécessité de construire le repère cartésien « comme objet mathématique » au collège (cf. atelier Chesnais et Destribats)

-> des situations au lycée pour travailler ces enjeux + une réflexion sur la cohérence théorique (axiomatique) sous-jacente (cf. atelier Cerclé et Nyssen)

- ➢ Réhabiliter la notion d'équation d'un objet géométrique (Descartes)
- ➢ Des enjeux de formation liés à la « dénaturalisation » et l'identification des enjeux

CONCLUSION GÉNÉRALE : LA CONSTRUCTION DES OBJETS DE LA GÉOMÉTRIE

- La construction des objets élémentaires de la géométrie
  - Au sein du travail géométrique
  - Les deux finalités de la géométrie
    - Le rapport avec les objets de l'espace physique (modélisation)
  - Les continuités et ruptures
  - Des problématiques associées : rôle des « dessins » en géométrie
- Une construction du cycle 2 au lycée
  - Du trait à la ligne prolongeable autant que l'on veut
  - La droite « à la Euclide »
  - La droite contenant une infinité de points
  - La droite comme ensemble continu de points
    - ne sera achevé qu'avec la construction de la droite réelle
    - Cohérent épistémologiquement : c'est la construction des réels qui permet de trancher la question de la continuité de la droite réelle, alors que la « continuité » de la droite euclidienne est associée à l'idée de tracer sans lever le crayon, mais n'est pas la continuité réelle.

➢ Se travaille en particulier en lien avec les nombres (repérage sur la droite graduée)