Théorie et pratique des triangles isométriques et semblables dans la géométrie « classique »

Sébastien Maronne

INSTITUT de MATHEMATIQUES de TOULOUSE

UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER

Université de Toulouse

XXV^{e} Colloque CORFEM
pour les professeurs et formateurs de mathématiques
Bordeaux, 11-12 juin 2018

Sources et études

Gaston Bachelard : *Le rationalisme appliqué*. PUF, Paris, 1966.

Euclide : *Les Éléments (4 vols.)*. PUF, Paris, 1990-2001. Édition de Bernard Vitrac (traduction et Commentaires) et Maurice Caveing (introduction générale).

Robin Hartshorne : *Geometry : Euclid and beyond*. Undergraduate texts in mathematics. Springer, New York, 2000.

David Hilbert : *Les Fondements de la géométrie. Edition critique avec introduction et compléments préparée par Paul Rossier*. Dunod, Paris, 1971. Réimpression chez Jacques Gabay en 1997.

Beppo Levi : *En lisant Euclide*. Agone, Paris, 2003.

L'égalité en géométrie

Dans les mathématiques modernes l'égalité renvoie au signe « = » et n'est qu'une abréviation d'un cas particulier de l'identité, « masquée » par la non-univocité des notations.

Si cette description est partiellement adéquate pour l'usage de l'égalité en arithmétique, en algèbre ou en analyse, les choses sont différentes en géométrie selon A. Tarski ; « égal » y est utilisé en plusieurs sens :

- l'identité (dans un triangle isocèle, la hauteur et la médiane relatives à la base sont « égales ») ;
- la congruence [le fait d'être superposable] ;
- l'égalité en grandeur [en longueur, aire, ou volume].

(Euclide, 1990-2001, « Sur l'égalité », I, p. 502)

La « pratique » de l'égalité dans *Les Éléments*

Dans le livre I [des *Éléments*], Euclide emploie l'adjectif ' ἴσον] ', mais la notion [d'égalité] n'est pas définie ; elle est présupposée dans la Définition de l'angle droit (I.10) et celle du cercle (I.15)... Egalités et inégalités sont appliquées à trois sortes d'objets : les segments de droites [égaux en longueur], les figures rectilignes [égales en aire] et les angles rectilignes [qui peuvent être mis en coïncidence]...

L'égalité des droites est établie d'abord grâce à cette figure de l'« égalité » qu'est le cercle (I.1), cette égalité est « invariante » par déplacement ; on peut donc imposer une extrémité arbitraire à une droite de grandeur donnée (I.2)...

Dans la démonstration de la Prop. 4, quelle que soit l'analyse logique que l'on en fasse, on voit que deux droites égales sont superposables et réciproquement, et que si deux segments ont les mêmes extrémités, ils sont superposables et égaux.

(Euclide, 1990-2001, « Sur l'égalité »,I, p. 507-508)

L'égalité dans les notions communes

Axiome (Hilbert : C2)

Soient AB, CD, EF trois segments.Si $AB \cong CD$ et $AB \cong EF$, alors $CD \cong EF$. Tout segment est congruent à lui-même.

Notion commune 1

Les choses égales à une même chose sont égales entre elles.

Axiome (Hilbert : C3)

Soient trois points A, B, C (alignés) tels que $A * B * C$ et trois autres points D, E, F (alignés) tels que $D * E * F$.

Si $AB \cong DE$ et $BC \cong EF$, alors $AC \cong DF$.

Notion commune 2

Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont égaux.

Notion commune 7

Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.

L'identification

Dès qu'on aborde les géométries très spécialisées, le principe d'identité pose un discernement très travaillé. Il n'est pas une application qui va de soi, il ne bénéficie pas d'une validité *a priori*. Les géométries ont besoin chacune d'un protocole d'identification…

Cette récurrence vers des déclarations d'identité qui spécifient un point de vue est un cas assez net d'épistémologie non-cartésienne. On avait très tôt posé le caractère élémentaire d'un être géométrique. On avait trop tôt donné comme simple une identité de deux figures par simple superposition. L'identité peut être attribuée à des cas qui dépassent cette superposition [par exemple, la similitude]…

Ainsi des Éléments tenus pour complexes dans un type de représentation peuvent être déclarés simples dans un autre type de représentation… Que dans un modèle euclidien de la géométrie lobatschewskienne, on puisse représenter une droite par un demi-cercle revient à dire que le demi-cercle est aussi simple que la droite, eu égard au changement de modèle.

(Bachelard, 1966, p. 84-85)

La construction du triangle équilatéral

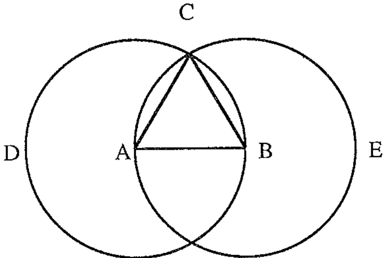
Proposition (*Eléments* I.1)

Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral.

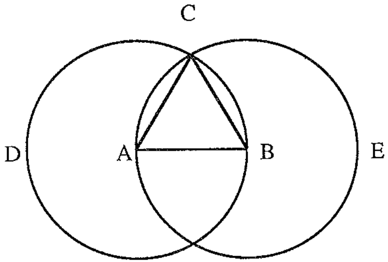
Soit AB la droite limitée donnée.

Il faut alors construire un triangle équilatéral sur la droite AB.

Que du centre A et au moyen de l'intervalle AB soit décrit le cercle BCD (Dem. 3), et qu'ensuite du centre B, et au moyen de l'intervalle BA, soit décrit le cercle ACE (Dem 3), et que du point C auquel les cercles s'entrecoupent soient jointes les droites CA, CB jusqu'aux points A, B (Dem. 1).



Démonstration



Démonstration.

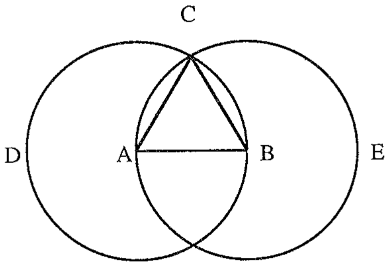
BCD est un cercle de centre A passant par B et C donc d'après la Df. 15 du cercle, $AB = AC$.

ACE est un cercle de centre B passant par A et C donc d'après la Df. 15 du cercle, $BA = BC$.

AC et BC sont égales à AB donc d'après la N.C 1, $AC = BC$.

$AC = AB = BC$ donc d'après la Déf. 20, ABC est un triangle équilatéral.

Une hypothèse manquante dans la démonstration



Euclide postule à partir de la figure que les deux cercles ACE et BCD se coupent.

Pour justifier l'existence d'un (des deux points) d'intersection des deux cercles, on doit s'appuyer sur un postulat supplémentaire :

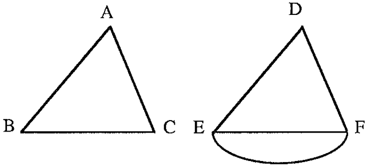
Postulat (Principe de continuité)

Si une ligne [la circonférence ACE] joint un point extérieur [E] à une figure [la circonférence BCD] à un point intérieur à cette figure [A], cette ligne a au moins un point commun avec la figure.

La proposition I.4 : énoncé

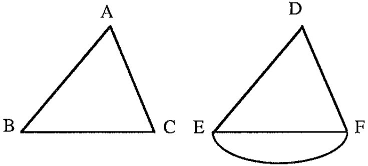
Proposition (*Eléments* I.4)

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est à dire ceux que les côtés sous-tendent.



Dans sa démonstration, et dans celle de la proposition I.8 (qui correspond au « premier » cas d'isométrie 'CCC'), Euclide utilise une « méthode de superposition de figures ».

La proposition I.4 : démonstration



Démonstration.

Le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, d'une part le point A étant posé sur le point D, d'autre part la droite AB sur DE, B aussi s'ajustera sur le point E parce que AB est égal à DE.

Alors, AB étant ajustée sur DE, la droite AC aussi s'ajustera sur DF parce que l'angle sous BAC est égal à celui sous EDF. De sorte que le point C aussi s'ajustera sur le point F parce que, de plus, AC est égale à DF.

Mais B a aussi été ajusté sur E. De sorte que la base BC s'ajustera sur la base EF et lui sera égale (N.C. 7). De sorte que tout le triangle ABC s'ajustera aussi sur tout le triangle DEF et lui sera égal (N.C. 7), et les angles restants... $\square$

La proposition I.4 : quelques remarques

- L'opération d' « ajustement » des droites AB, AC sur les droites DE, DF pourrait être envisagée comme la construction de droites $A'B'$, $A'C'$ égales respectivement à AB, AC et ajustées sur DE, DF. Mais alors il faudrait postuler l'égalité des triangles ABC et $A'B'C'$ *i.e.* admettre ce qu'il faut démontrer.
- Selon Proclus, il est fait usage au début de la démonstration de la réciproque de la N.C. 7 : « les choses égales entre elles coïncident ». Mais alors il faudrait avoir défini l'égalité des angles sans superposition, sauf à retomber dans un cercle vicieux.
- On pourrait interpréter la démonstration comme impliquant un mouvement. Mais alors elle paraîtrait incohérente par rapport aux constructions des problèmes I.2 et I.3 et n'est pas *a priori* autorisé par ses postulats. Rien ne dit en effet que l'on puisse déplacer de façon rigide une figure dans le plan sans changer ses côtés et ses angles. Cela revient à postuler l'homogénéité de l'espace.
- La coïncidence des figures superposées ferait appel pour sa démonstration à une constatation empirique sur la figure.

Le mouvement en géométrie

Dans les mathématiques modernes (élémentaires), le « mouvement » des figures renvoie à la notion de transformation géométrique.

Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'une distance d dérivant d'un produit scalaire, on définit une isométrie comme une transformation du plan $\mathcal{P}$ qui conserve les distances. On montre alors qu'elle conserve aussi les angles (non orientés).

Étant donnée une figure F (un ensemble fini de points) on dit alors qu'elle est congruente à une autre figure F' lorsqu'il existe une isométrie T telle que $F' = T(F)$.

Une autre stratégie, suivie par Hilbert, consiste à introduire des axiomes de congruence.

Les axiomes de congruence pour les angles dans les *Fondements de la géométrie* de Hilbert

On postule une relation binaire de congruence pour les angles qu'on note $\cong$ qui vérifie les axiomes suivants.

Axiome (C4 : Transport)

Soit un angle $\widehat{BAC}$ et une demi-droite $[DF)$. Il existe une unique demi-droite $[DE)$ sur un côté donné de la droite (DF), tel que $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDF}$.

Axiome (C5 : Relation d'équivalence)

Soient α, β, γ trois angles. Si $\alpha \cong \beta$ et $\alpha \cong \gamma$, alors $\beta \cong \gamma$. Tout angle est congruent à lui-même.

Axiome (C6 : Côté-Angle-Côté (CAC))

Soient ABC et DEF des triangles. On suppose que $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ et $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDF}$.
Alors on a $BC \cong EF$, $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ et $\widehat{ACB} \cong \widehat{DFE}$.
On dit alors que les triangles sont congruents.

Une interprétation mathématique moderne : Harthshorne

Curiously enough, in order to show that (SAS) holds in the geometry over a field, we will use Euclid's method of superposition, but only after proving that it makes sense. We will define the notion of rigid motion of a plane and show that there are enough of them to make Euclid's method work.

Conversely, we will prove the existence of rigid motions in an arbitrary Hilbert plane. Thus the existence of enough rigid motions is essentially equivalent to the statement (SAS), in the presence of the other axioms. This gives a satisfactory modern understanding of the meaning of Euclid's method of superposition. It also introduces us to the group of rigid motions of the plane and validates Felix Klein's point of view, expressed in his "Erlanger Programm" in the late nineteenth century, that one should classify different geometries according to the groups of motions that act on them.

(Hartshorne, 2000, « Rigid motions and SAS », p. 148-155)

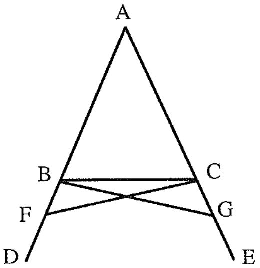
La proposition I.5 sur les triangles isocèles : énoncé

Proposition (*Eléments* I.5)

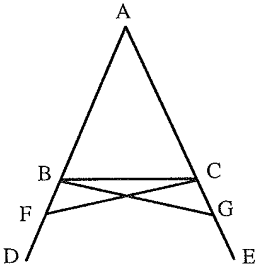
Les angles à la base des triangles isocèles sont égaux entre eux, et si les droites égales sont prolongées au-delà, les angles sous la base seront égaux entre eux.

Soit un triangle isocèle ABC ayant le côté AB égal au côté AC, et que, BD, CE soient les prolongements en ligne droite de AB, AC...

En effet, qu'un point F soit pris au hasard sur BD, et que soit retranchée de la plus grande, AE, la droite AG, égale à la plus petite AF (Prop. 3) et que les droites FC, GB soient jointes (Dem. 1).



La proposition I.5 sur les triangles isocèles : démonstration



Structure de la démonstration.

- Les triangles AFC et ABG sont égaux. (cac)
- Les triangles FBC et BCG sont égaux. (cac)
- Par soustraction, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux. (nc3)

Quelques remarques sur la proposition I.5

- Il est possible de démontrer le cas d'égalité des triangles « ccc » sans la méthode de superposition grâce à la proposition I.5.
- Il est possible de démontrer de façon rigoureuse dans le cadre de la géométrie de Hilbert, sans axiome de continuité, qu'un segment $[AB]$ étant donné, il existe un triangle isocèle de base $[AB]$. Cela permet de « fonder » les constructions usuelles à la règle et au compas dans un plan hilbertien.

La « rigorisation » d'une pseudo-démonstration

Dans la figure ci-dessous, nous avons hachuré de façon analogue les angles qui, dans les deux démonstrations, jouent un rôle analogue ; les uns sont des angles entre des courbes (fig. 14), dont l'égalité découle uniquement d'une intuition sur la symétrie ; les autres sont des angles rectilignes (voir fig. 13), dont l'égalité découle d'un raisonnement systématique. . .

(Levi, 2003, 112-113)

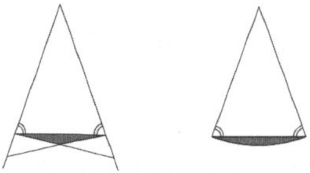


Fig. 13

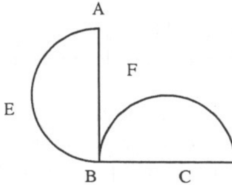
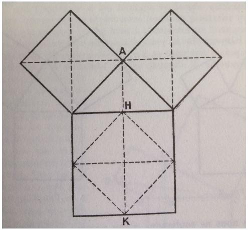


Fig. 14

Le cas du triangle rectangle isocèle

Supposons donc d'abord que le triangle rectangle sur les côtés duquel on construit le carré soit isocèle. La figure prend alors une totale symétrie. Des constructions immédiates évidentes font apparaître des triangles rectangles entièrement identiques au triangle central. Un simple travail de découpage suffit, dans ce cas particulier, à affirmer la validité du théorème de Pythagore. Les triangles isolés par la construction ne sont pas seulement d'égale surface, ils sont à tous les points de vue identiques. Ils ne diffèrent que par la place.

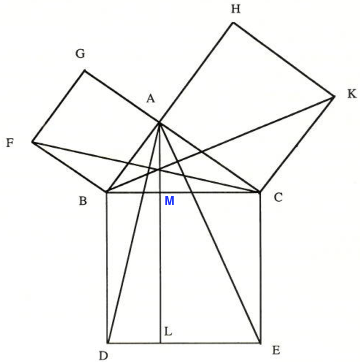
(Bachelard, 1966, p. 86-87)



La proposition I.47 des *Éléments*

Proposition (*Eléments* I.47)

Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.

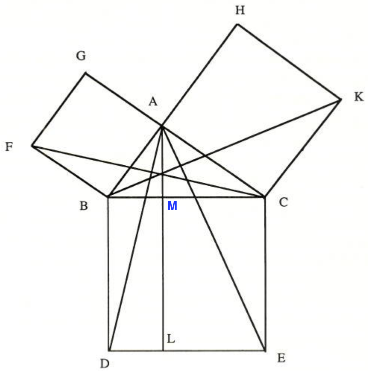


Soit le triangle rectangle ABC ayant l'angle sous BAC droit.
Je dis que le carré sur BC est égal aux carrés sur BA, AC.

La démonstration d'Euclide

Les triangles ACE et BCK sont égaux.

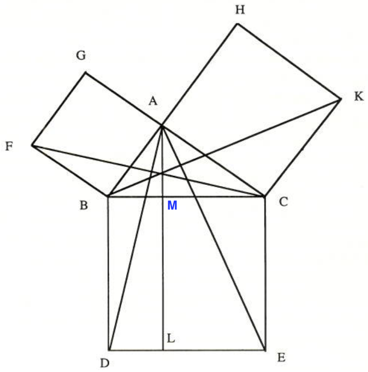
$BDEC$ est un carré donc $BC = CE$. $ACKH$ est un carré donc $AC = CK$. $\widehat{BCK} = \widehat{BCA} + \widehat{ACK} = \widehat{BCA} + \widehat{BCE} = \widehat{ACE}$ d'après la N.C. 2 et le Postulat 4 (tous les angles droits sont égaux). Mais alors, d'après la Prop. I.4, les triangles ACE et BCK sont égaux (isométriques). □



La démonstration d'Euclide (suite)

Le carré $ACKH$ et le rectangle $ECML$ sont égaux.

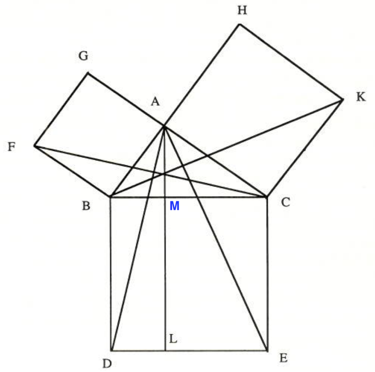
D'après la Prop. I.41, le rectangle $CMLE$ est double (en aire) du triangle ACE car ils sont situés entre les mêmes parallèles AL et CE. Pour les mêmes raisons, le carré $ACKH$ est double (en aire) du triangle BCK. On en déduit (N.C 1) que le carré $ACKH$ et le rectangle $ECML$ sont égaux. □



La démonstration d'Euclide : conclusion

Démonstration.

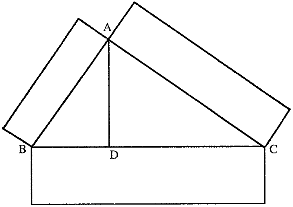
Le carré $AGFB$ et le rectangle $BDLM$ étant égaux, on en déduit par addition que le carré $BDEC$ est égal à la somme des carrés $AGFB$ et $ACKH$. $\square$



La proposition VI.31 : énoncé

Proposition (*Eléments* VI.31)

Dans les triangles rectangles, la figure sur le côté sous-tendant l'angle droit est égale aux figures sur les côtés contenant l'angle droit, semblables et semblablement décrites.

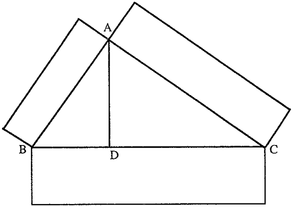


Soit le triangle rectangle ABC ayant l'angle sous BAC droit. Je dis que la figure sur BC est égale aux figures sur BA, AC, semblables et semblablement décrites.

Que soit menée la perpendiculaire AD.

La proposition VI.31 : démonstration

Structure de la démonstration.



- $\dfrac{CB}{AB} = \dfrac{AB}{DB}$ et $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{CA}{CD}$;
- $\dfrac{\mathsf{Fig}_{BC}}{\mathsf{Fig}_{AB}} = \dfrac{CB}{BD}$ et $\dfrac{\mathsf{Fig}_{BC}}{\mathsf{Fig}_{AC}} = \dfrac{CB}{CD}$;
- $\dfrac{\mathsf{Fig}_{BC}}{\mathsf{Fig}_{AB} + \mathsf{Fig}_{AC}} = \dfrac{CB}{BD + CD} = 1.$

$\square$

La cause profonde du théorème de Pythagore

Ainsi en cherchant le caractère de causalité rationnelle on passe successivement du carré aux polygones réguliers, des polygones réguliers aux figures semblables. Le caractère causal est la similitude. . .

Cette proposition se présente comme une administration très curieuse des figures semblables. Seul le triangle rectangle donne cette distribution équilibrée des surfaces.

Le carré n'est qu'un accident, c'est la similitude, « idée abstraite », qui donne la loi. . .

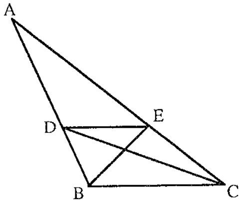
Une fois qu'on a ainsi réalisé la valeur rationnelle de l'idée abstraite, on se rend compte que la plus grande compréhension va de pair avec la plus grande extension. C'est en étendant à l'extrême une idée qu'on en saisit la compréhension maxima.

(Bachelard, 1966, p. 93-94)

Le théorème « de Thalès » : énoncé

Proposition (*Eléments* VI.2)

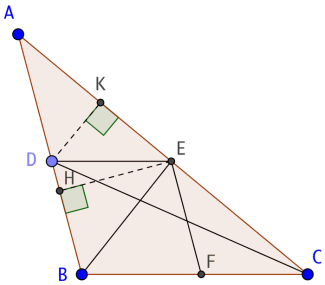
Si une certaine droite est menée parallèle à l'un des côtés d'un triangle, elle coupera les côtés du triangle en proportion ; et si les côtés du triangle sont coupés en proportion, la droite jointe entre les points de section sera parallèle au côté restant du triangle.



En effet que soit menée la droite DE, parallèle à l'un des côtés BC du triangle ABC. Je dis que comme BD est relativement à DA, ainsi est CE relativement à EA.
En effet que BE, CD soient jointes.

Le théorème de Thalès : démonstration

Structure de la démonstration.



- $aire(BDE) = aire(CDE)$;
- $\dfrac{aire(BDE)}{aire(ADE)} = \dfrac{BD}{DA}$ et $\dfrac{aire(CDE)}{aire(ADE)} = \dfrac{CE}{EA}$.

□

Quelques remarques sur le théorème « de Thalès »

- L'attribution à Thalès de ce théorème est moderne et n'est corroborée par aucun témoignage antique. Elle est donc très vraisemblablement erronée.
- Le théorème de Thalès permet de démontrer que la condition d'égalité des angles est suffisante pour établir la similitude des triangles.
- Descartes construit le produit et le quotient de deux longueurs, en ayant fixé préalablement une unité à discrétion, grâce à ce même théorème dans le premier livre de sa *Géométrie* de 1637.